GANTER UND RUDIO

DIE ANALYTISCHE GEOMETRIE DER EBENE

VIERTE AUFLAGE

B. G. TEUBNER

IN LEIPZIG

IN MEMORIAM
Edward Bright

SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
LVX
FIAT
MDCCCLXVIII

EX LIBRIS

Mathematics Dept.

ASTRONOMY, MATHEMATICS-
STATISTICS LIBRARY

folgenden Gebieten

ometrie.

Pr.]

n. ℳ 14.—
n. „ 1.60
nen Geometrie.
n. ℳ 14.—

n. „ 2.—
n. „ 3 40
n. „ 28.—
n. „ 6.80
n. „ 6.—
n. „ 14.—
ch von Schepp.
n. ℳ 1.20
n. „ 11.—
errichts. n. „ 6.—
bis auf Gauls.
n. ℳ 9.—

pp. n. „ 20.—
n. „ 1.20

Kegelschnitte.

n. ℳ 1.60
n. „ 3.80
e. n. „ 1.60
n. „ 1.20
n. „ 1.50
n. „ 2.—
sweise. n. „ 2.—
ndlung. n. „ 1.20
n. „ 2.—
n. „ 3.40
Heinze, genetische Stereometrie, bearb. von Lucke. n. „ 6.—
Henrici und Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie n. „ 7.60
Hefs, Lehre von der Kugelteilung. n. „ 14.—
Hippauf, Lösung des Problems der Trisektion mittelst Konchoide. n. „ 1.20
Hofmann, die Konstruktionen doppelt berührender Kegelschnitte. n. „ 3.20
Holzmüller, methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. n. „ 13.60
—— Einführung in das stereometrische Zeichnen. n. „ 4.40
Huebner, ebene und räumliche Geometrie des Mafses. n. „ 4.—
Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. n. „ 2.—
Kober, Leitfaden der ebenen Geometrie. n. „ 1.—
Lucke, Leitfaden der Stereometrie. n. „ 2.80
Milinowski, elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte mit einem Anhange über die gleichseitige Hyperbel. n. ℳ 4.—

Müller, H., Leitfaden der ebenen Geometrie. n. ℳ 4.40
—— Leitfaden der Stereometrie. n. „ 2.—
Rausenberger, Elementargeometrie des Punktes, der Geraden u. Ebene. n. ℳ 5.—
Reidt, Sammlung von Aufgaben aus der Trigonometrie u. Stereometrie. n. ℳ 7.—
—— —— Resultate dazu. n. „ 2.80
—— trigonometrische Analysis planimetrischer Aufgaben. n. „ 1.20
Reishaus, Vorschule zur Geometrie: Lehrbuch und Aufgaben. n. „ 3.20
Richter, A., Sammlung arithm. und trigonom. Aufgaben. n. „ 2.70
Rudio, Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels. n. „ 4.—
Schilke, Sammlung planimetrischer Aufgaben. n. „ 1.—
Schlömilch, Grundzüge einer Geometrie des Mafses. n. „ 7.60
Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. n. „ 14.—
Schulze, Leitfaden für den trigonometr. und stereometr. Unterricht. n. „ 2.40
Servus, ausführl. Lehrbuch d. Stereometrie u. sphärischen Trigonometrie. n. ℳ 2.80
Thieme, Lehrsätze und Aufgaben aus der Stereometrie. n. „ 1.20
Treutlein und Henrici, siehe: Henrici und Treutlein.
Wehner, Leitfaden für den stereometr. Unterricht an Realschulen. n. „ —.80
Wiener, über Vielecke und Vielflache. n. „ 2.40
Zehme, Lehrbuch der ebenen Geometrie. n. „ 2.40
Zeuthen, Grundrifs einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre. n. ℳ 2.—

Darstellende Geometrie.

(Projektionslehre, Axonometrie, Parallel- und Centralprojektion oder Perspektive — siehe auch unter „Kartenprojektionen“.)

Burmester, Beleuchtung gesetzmäfsiger Flächen. n. ℳ 8.—
—— Grundzüge der Reliefperspektive. n. „ 2.—
Disteli, die Steinerschen Schliefsungsprobleme. n. „ 4.—
Drach, Einleitung in die Theorie der kubischen Kegelschnitte. n. „ 2.80
Fiedler, die darstellende Geometrie. n. „ 38 40
—— Cyklographie. n. „ 9.—
Finsterwalder, die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. n. ℳ 4.—
Fiorini-Günther, Erd- u. Himmelsgloben, ihre Geschichte und Konstr. n. ℳ 4 —
Hofmann, die Konstruktionen doppelt berührender Kegelschnitte. n. „ 3.20
Holzmüller, Einführung in das stereometrische Zeichnen. n. „ 4.40
—— einige Aufgaben der darstellenden Geometrie und der Kartographie. n. ℳ —.80
Klekler, die Methoden der darstellenden Geometrie. n. „ 4.40
Prix, Elemente der darstellenden Geometrie. n. „ 3.20
Reusch, die stereographische Projektion. n. „ 2.40
Schell, allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung. n. „ 5.—
Scherling, Grundzüge der axonom. und schiefen Parallel-Projektion. n. ℳ 1.—
Sturm, Elemente der darstellenden Geometrie. n. „ 4.—
Weiler, neue Behandlung der Parallelprojektionen und der Axonom. n. ℳ 2.80
Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. n. „ 30.—
—— stereoskopische Photographieen des Modelles einer Fläche 3. O. n. ℳ 2.40

Neuere synthetische (projektive) Geometrie.

(Geometrie der Lage, Kollineation und Homographie.)

Binder, Theorie der unikursalen Plankurven 4. bis 3. Ordnung. n. ℳ 12.—
Bobek, Einleitung in die projektivische Geometrie, bearb. nach Küpper. n. ℳ 2.—
Disteli, die Steinerschen Schliefsungsprobleme. n. „ 4.—

Dronke, die Kegelschnitte in synthetischer Behandlungsweise. n. M. 2.—
Durège, die ebenen Kurven 3. Ordnung. n. „ 7.20
Eberhard, die Grundgebilde der ebenen Geometrie. n. „ 14.—
—— zur Morphologie der Polyeder. n. „ 8.—
Fiedler, Cyklographie. n. „ 9.—
Fuhrmann, W., Einleitung in die neuere Geometrie. n. „ 1.60
Geiser, Einleitung in die synthetische Geometrie. n. „ 3.—
Hankel, H., Vorlesungen üb. d. Elemente der projektivischen Geometrie n. M. 7.—
Henrici und Treutlein, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. II. Teil. n. M. 2 80
Holzmüller, math. Lehrbuch. Bd. III. n. „ 2.80
Kötter, die Entwickelung der synthetischen Geometrie. n. „ 4.40
Müller, H., Leitfaden der ebenen Geometrie. I. Teil 2. Heft und II. Teil. n. M. 2.80
—— Leitfaden der Stereometrie. n. „ 2.—
Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie. n. „ 4.—
Reye, synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme. n. M. 2.40
Schell, allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung. n. „ 5.—
Schroeter, Theorie der Oberflächen 2. Ordnung u. Raumkurven 3. Ordnung. n. M. 16.—
—— Theorie der ebenen Kurven 3. Ordnung. n. „ 8.—
—— Grundzüge einer rein geometr. Theorie der Raumkurven 4. O. 1. Sp. n. M. 2.80
Steiner's Vorlesungen über synthet. Geom., bearb. v. Geiser u. Schroeter. n. M. 20.—
Sturm, die Gebilde 1. u. 2. Grades d. Liniengeom. in synthet. Behandlung. n. M. 42.—
—— synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung. n. „ 8.—
Thomae, Untersuchungen über zwei zweideutige Verwandtschaften. n. „ 3 —
Treutlein und Henrici, siehe: Henrici und Treutlein.
Weyer, Einführung in die neuere konstruierende Geometrie. n. „ 1.20
Weyr, Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde. n. „ 4.—
—— Geometrie der räumlichen Erzeugnisse 1—2deutiger Gebilde. n. „ 4.—
Witzschel, Grundlinien der neueren Geometrie. n. „ 6.—

Topologie oder Gestaltenlehre.

(Anwendung auf Krystallographie.)

Dingeldey, topologische Studien u. s. w. n. M. 2.40
Eberhard, die Grundgebilde der ebenen Geometrie. n. „ 14.—
—— zur Morphologie der Polyeder. n. „ 8.—
Minkowski, Geometrie der Zahlen. n. „ 8.—
Naumann, über die cyklocentrische Konchospirale. n. „ 1.—
—— über die Rationalität der Tangentenverhältnisse. n. „ 1.—
Schoenflies, Krystallsysteme und Krystallstruktur. n. „ 12.—
Sohncke, Entwickelung einer Theorie der Krystallstruktur. n. „ 8.—

Abzählende Geometrie.

Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie. n. M. 9.60

Geometrie der Bewegung.

(Kinematik.)

Abdank-Abakanowicz, die Integraphen, deutsch von Bitterli. n. M. 6.—
Dingeldey, Erzeugung von Kurven 4. O. durch Bewegungsmechanismen. n. M. 2.—
Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. I. Band. n. „ 10.—
Schoenflies, Geometrie der Bewegung. n. „ 4.—
Somoff, theoretische Mechanik, deutsch von Ziwet. I. Bd. n. „ 13.60

DIE ELEMENTE

DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE.

UNIV. OF CALIFORNIA

ZUM GEBRAUCHE AN HÖHEREN LEHRANSTALTEN
SOWIE ZUM SELBSTSTUDIUM.

MIT ZAHLREICHEN ÜBUNGSBEISPIELEN.

ERSTER TEIL.

DIE ANALYTISCHE GEOMETRIE DER EBENE.

VON

Dr. H. GANTER
PROFESSOR AN DER KANTONSSCHULE
IN AARAU.

UND

Dr. F. RUDIO
PROFESSOR AM POLYTECHNIKUM
IN ZÜRICH.

MIT 54 FIGUREN IM TEXTE.

VIERTE, VERBESSERTE AUFLAGE.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

QA551
G26
1900
v.1
Math.
dept.

In Mem.
Ed Bright
Math. Dept.

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTES, VORBEHALTEN.

Vorrede zur vierten Auflage.

Wir können der vierten Auflage unseres Buches im wesentlichen dieselben Worte vorausschicken wie der dritten. Der Umstand, dafs diese besonders starke Auflage in so kurzer Zeit vergriffen war, ist uns ein Beweis dafür, dafs unser Buch einem wirklichen Bedürfnisse entspricht. Wir haben daher die neue Auflage, von einigen wenigen Verbesserungen und Zusätzen abgesehen, dem Inhalte nach unverändert gelassen und uns darauf beschränkt, die Darstellung zu vervollkommnen. Auf Wunsch der Verlagsbuchhandlung wurde noch ein alphabetisches Sachregister hinzugefügt und dadurch unser Buch auch äufserlich mit der vor kurzem erschienenen zweiten Auflage der „Elemente der analytischen Geometrie des Raumes“ in Übereinstimmung gebracht.

Aarau und Zürich, September 1899.

Die Verfasser.

Vorrede zur dritten Auflage.

Die vorliegende dritte Auflage ist, soweit es sich um den Text handelt, im wesentlichen ein Abdruck der zweiten. Änderungen wurden nur vorgenommen, wo wir glaubten, die Übersichtlichkeit der Gruppierung und die Präzision der Darstellung erhöhen zu können. Den von der Kritik geäufserten Wünschen suchten wir, soweit als möglich, in den Übungsaufgaben, deren Zahl von 405 auf 436 erhöht wurde, gerecht zu werden. Es gilt dies in besonderem Mafse von den Anregungen, die wir der eingehenden Besprechung der zweiten

781457

Seite

§ 62. Beziehungen zwischen den Sehnen und Tangenten einer Hyperbel und ihren Asymptoten 145
§ 63. Pol und Polare 149
§ 64. Brennpunktseigenschaften 150
§ 65. Die Direktrix 153

Sechstes Kapitel.

Die Parabel. (49 Aufgaben.)

§ 66. Definition und Gleichung der Parabel 155
§ 67. Die Parabel und die Gerade. Durchmesser 158
§ 68. Tangente und Normale 160
§ 69. Anwendung schiefwinkliger Koordinaten 164
§ 70. Pol und Polare 167
§ 71. Flächeninhalt eines Parabelsegmentes 169
§ 72. Gemeinsame Darstellungen von Ellipse, Hyperbel und Parabel 171

Sachregister 177

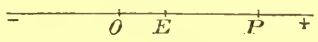
Erstes Kapitel.

Der Punkt.

§ 1. Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Geraden durch seine Abscisse.

In einer als unbegrenzt gedachten Geraden seien zwei Punkte O und E gegeben, von denen wir den ersten als Anfangspunkt, den zweiten als Einheitspunkt bezeichnen.

Fig. 1.



Die Länge der Strecke OE wählen wir als Längeneinheit, durch die wir jede auf der Geraden befindliche Strecke messen wollen. Wir stellen uns etwa vor, OE sei gleich einem Centimeter, sodafs alle vorkommenden Strecken sich als Vielfache von einem Centimeter darstellen.

Indem wir dem Punkte O den Punkt E zugesellen, gewinnen wir aber nicht nur einen Mafsstab für die Längen der auf der Geraden vorkommenden Strecken, sondern wir sind jetzt auch im Stande, die beiden von O ausgehenden Richtungen unserer Geraden von einander zu unterscheiden. Wir wollen die Richtung von O nach E als die positive Richtung, die entgegengesetzte als die negative Richtung der Geraden bezeichnen. Dabei werden wir, um die Vorstellungen zu fixieren, ein für allemal den Punkt E rechts von O annehmen, sodafs die Richtung von O aus nach rechts als die positive, die von O aus nach links als die negative zu betrachten ist.

Ist nun auf der Geraden ein beliebiger Punkt P gegeben, so ist seine Lage vollständig bestimmt, wenn man erstens

seine (durch die Längeneinheit OE gemessene) Entfernung vom Anfangspunkte O kennt und wenn man zweitens weifs, ob er sich rechts oder links von O befindet. Es liegt daher nach dem Obigen nahe, die Entfernung OP mit einem Vorzeichen zu versehen, nämlich mit dem positiven, wenn die Richtung OP die positive ist, d. h. wenn P rechts von O liegt, dagegen mit dem negativen Vorzeichen, wenn die Richtung OP die negative ist, d. h. wenn sich P links von O befindet.

Man nennt die mit dem entsprechenden Vorzeichen versehene Entfernung OP die Abscisse des Punktes P in Bezug auf den Anfangspunkt O. Die gegebene Gerade OE wird daher auch die Abscissenachse genannt.

Alle Punkte rechts von O haben dann positive, alle Punkte links von O negative Abscissen. Insbesondere hat E die Abscisse $+1$. Nach diesen Erörterungen wird der folgende Satz unmittelbar einleuchten:

Jedem Punkte P der Abscissenachse entspricht eine ganz bestimmte (positive oder negative) Zahl x, nämlich seine Abscisse, und umgekehrt, jeder (positiven oder negativen) Zahl x entspricht ein ganz bestimmter Punkt P der Abscissenachse, nämlich der, dessen Abscisse gleich der gegebenen Zahl x ist.

Wir sind demnach im Stande, die ganze Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ geometrisch durch eine Punktreihe zu veranschaulichen, gewissermafsen abzubilden, und umgekehrt die Punktreihe, deren Träger die gegebene Gerade ist, in eindeutiger Weise durch eine Zahlenreihe zu repräsentieren. In dieser eigentümlichen Verknüpfung von Punkten und Zahlen besteht das Wesen der analytischen Geometrie.

Aufgabe 1.*) Bestimme nach Wahl von O und E die Punkte mit den Abscissen 1, -1, $\frac{3}{2}$, $-\frac{4}{3}$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Aufg. 2. Konstruiere zu dem Punkte mit der gegebenen Abscisse a die Punkte mit den Abscissen $\sqrt{a}$, $\sqrt{2a}$, $a\sqrt{2}$, $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

*) Man zeichne bei dieser wie bei allen folgenden Aufgaben stets die zugehörige Figur.

Aufg. 3. Bestimme die Punkte, deren Abscissen den Gleichungen $2x - 3 = 0$, $7x + 5 = 0$, $5x + 1 = 0$ genügen.

Aufg. 4. Bestimme die Punkte, deren Abscissen den Gleichungen $2x^2 + 5x + 2 = 0$, $x^2 + 4x - 3 = 0$ genügen.

§ 2. Bestimmung von Strecken.

Die im Vorhergehenden entwickelten, auf der Einführung des Richtungsunterschiedes begründeten Anschauungen übertragen wir auch auf begrenzte Strecken der Abscissenachse, indem wir einen Unterschied machen zwischen der Strecke AB und der Strecke BA. Wir nennen eine beliebige Strecke AB, mit dem Anfangspunkte A und dem Endpunkte B, positiv oder negativ, je nachdem man sich, um von A nach B zu gelangen, in der positiven oder der negativen Richtung bewegen mufs. Dann ist also allemal die Strecke BA, mit dem Anfangspunkte B und dem Endpunkte A, der Strecke AB gleich und entgegengesetzt, und es ist daher:

(1) $$AB + BA = 0.$$

Bedeutet C einen beliebigen dritten Punkt der Abscissenachse, so gilt in Folge dieser Festsetzungen stets, wie auch die drei Punkte zu einander liegen mögen, die Gleichung:

(2) $$AB + BC + CA = 0,$$

oder:

(3) $$AB = CB - CA.$$

Bezeichnet man dem entsprechend mit x_1 und x_2 die Abscissen zweier Punkte P_1 und P_2 in Bezug auf den Anfangspunkt O, so hat man:

(4) $$P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = x_2 - x_1,$$

während die Strecke P_2P_1 durch $x_1 - x_2$ dargestellt wird.

Wählt man ferner auf der Abscissenachse einen neuen Anfangspunkt O', dessen Abscisse $OO' = a$ ist, und bezeichnet die Abscisse eines Punktes P in Bezug auf den alten Anfangspunkt O, also OP, mit x, dagegen die Abscisse von P in Bezug auf den neuen Anfangspunkt O', also $O'P$, mit x', so erhält man aus der Gleichung $O'P = OP - OO'$ die Relation:

(5) $$x' = x - a, \quad \text{oder} \quad x = x' + a.$$

Diese Gleichungen zeigen, wie sich die Abscisse eines Punktes beim Übergange zu einem neuen Anfangspunkte ändert.

Aufg. 1. Welches ist die Länge der Strecke AB, wenn die Abscissen von A und B in Bezug auf den Anfangspunkt O $\frac{5}{3}$ und $-\frac{1}{2}$ sind? Welches Vorzeichen hat AB?

Aufg. 2. Bestimme Länge und Vorzeichen der Strecken P_1P_2 und P_2P_1, wenn die Abscissen von P_1 und P_2 das eine Mal $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, ein anderes Mal $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$, ein drittes Mal $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{4}$ sind.

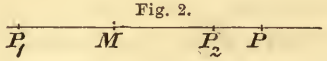
Aufg. 3. Beweise, dafs der Mittelpunkt der Strecke P_1P_2 die Abscisse $\frac{x_1 + x_2}{2}$ hat, wenn x_1 und x_2 die Abscissen von P_1 und P_2 sind.

Aufg. 4. Der neue Anfangspunkt O' habe in Bezug auf den alten Anfangspunkt O die Abscisse $a = -3$. Welches sind die neuen Abscissen der Punkte P_1, P_2, P_3, deren alte Abscissen $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$ sind?

§ 3. Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Geraden durch sein Teilverhältnis.

Man kann die unendliche Zahlenreihe auf die Punktreihe einer Geraden noch in einer andern Weise abbilden. Zu diesem Zwecke fixieren wir zunächst wieder auf der Geraden eine positive und eine negative Richtung. Wir wählen sodann auf der Geraden zwei Punkte P_1 und P_2 und nennen die Strecke P_1P_2 die Fundamentalstrecke. Diese besitzt nicht nur eine bestimmte Länge (gemessen durch die gewählte Längeneinheit), sondern auch eine bestimmte Richtung, durch die sie sich von der Strecke P_2P_1 unterscheidet.

Fig. 2.



Sei jetzt P ein beliebiger dritter Punkt der Geraden, so ist stets:

(1) $P_1P + PP_2 + P_2P_1 = 0$, oder $P_1P = P_1P_2 - PP_2$,

gleichgültig, ob P auf der Fundamentalstrecke oder aufserhalb liegt, wenn nur bei jeder der Strecken das Vorzeichen

richtig beachtet wird. Man nennt das Verhältnis der beiden Teilstrecken P_1P und PP_2, also den Quotienten $\frac{P_1P}{PP_2}$, das Teilverhältnis des Punktes P in Bezug auf die Fundamentalstrecke P_1P_2. Zu jedem Punkte P gehört dann eine ganz bestimmte Zahl, nämlich sein Teilverhältnis, und zwar ist dieses positiv für alle Punkte zwischen P_1 und P_2, weil dann P_1P und PP_2 gleichgerichtet sind, und negativ für alle Punkte aufserhalb der Fundamentalstrecke, weil dann immer P_1P und PP_2 entgegengesetzte Richtungen haben. Sehen wir nun zu, wie sich das Teilverhältnis $\frac{P_1P}{PP_2}$, das wir kurz mit λ bezeichnen wollen, ändert, wenn P die unendliche Gerade durchläuft.

Befindet sich P in P_1, so ist offenbar sein Teilverhältnis $\lambda = 0$. Bewegt sich dann P von P_1 bis zum Mittelpunkte M der Fundamentalstrecke, so wird λ allmählich gröfser und erreicht in M den Wert $+1$. Geht P über M hinaus bis zu P_2, so wächst λ über alle Grenzen; für P_2 selbst ist daher $\lambda = +\infty$ zu setzen. Würde sich P von der entgegengesetzten Seite her dem Punkte P_2 genähert haben, so hätte λ immer gröfsere und gröfsere negative Werte angenommen, sodafs dem Punkte P_2 dann das Teilverhältnis $-\infty$ zuzusprechen wäre. (Man vergleiche damit das Verhalten von $\operatorname{tg}\alpha$ für $\alpha = 90^0$.)

Für alle Punkte aufserhalb der Fundamentalstrecke ist λ, wie schon bemerkt, negativ, und zwar erkennt man, dafs, wenn P aufserhalb und auf der Seite von P_2 liegt, λ sich zwischen $-\infty$ und -1 befindet, dafs dagegen, wenn P aufserhalb und auf der Seite von P_1 liegt, λ allemal Werte zwischen 0 und -1 besitzt. Es fragt sich noch, welchem Werte nähert sich λ, wenn P sich nach der einen oder der anderen Seite der Geraden ins Unendliche bewegt? Da

$$P_1P = P_1P_2 - PP_2$$

ist, so folgt:

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = -1 + \frac{P_1P_2}{PP_2}. \tag{2}$$

Mag sich nun P nach der einen oder der andern Seite hin ins Unendliche bewegen, so wird sich $\frac{P_1P_2}{PP_2}$ immer mehr

und mehr der Null nähern, sodafs wir in beiden Fällen den Grenzwert -1 für λ erhalten.

Wir wählen daher die Ausdrucksweise, die Gerade besitze einen einzigen unendlich fernen Punkt, dem man sich in der einen oder der andern Richtung nähern kann und dem das Teilverhältnis -1 zukommt. Betrachtet man dann der Gleichförmigkeit des Ausdrucks wegen auch die beiden Grenzwerte $+\infty$ und $-\infty$, die wir für das Teilverhältnis von P_2 erhalten haben, als zusammenfallend, so ergiebt sich der folgende Satz:

Jedem Punkte P der Geraden entspricht eine ganz bestimmte (positive oder negative) Zahl λ, nämlich sein Teilverhältnis, und umgekehrt, jeder (positiven oder negativen) Zahl λ entspricht ein ganz bestimmter Punkt P der Geraden, nämlich der, dessen Teilverhältnis gleich der gegebenen Zahl λ ist.

Die Gleichung $\lambda = -1 + \frac{P_1P_2}{PP_2}$ liefert nämlich zu jedem λ ein ganz bestimmtes $PP_2 = \frac{P_1P_2}{1+\lambda}$ und damit auch einen ganz bestimmten Punkt P, sodafs auch die Umkehrung gerechtfertigt ist.

Der Vollständigkeit halber stellen wir diese Verhältnisse noch durch folgende Tabelle zusammen:

Bewegt sich P	so bewegt sich λ
von P_1 bis M	von 0 bis $+1$
„ M „ P_2	„ $+1$ „ $+\infty$
„ P_2 „ ∞	„ $-\infty$ „ -1
„ ∞ „ P_1	„ -1 „ 0.

Wählt man, wie in § 1, einen beliebigen Anfangspunkt O und bezeichnet die Abscissen der drei Punkte P_1, P_2, P mit x_1, x_2, x, so ist $P_1P = x - x_1$ und $PP_2 = x_2 - x$.

Man erhält daher:

$$(3) \qquad \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \text{ und folglich } x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

Gleichungen, die aus der Abscisse eines Punktes sein Teilverhältnis, und umgekehrt, zu berechnen ge-

statten. Insbesondere erhält man für $\lambda = 1$ die Abscisse des Mittelpunktes der Strecke P_1P_2, nämlich $\frac{x_1 + x_2}{2}$.

Aufg. 1. Konstruiere die Punkte mit den Teilverhältnissen $2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2, 3, -\frac{5}{2}, -\frac{3}{7}$.

Aufg. 2. Zeige, dafs das Teilverhältnis λ eines Punktes P unabhängig ist von der gewählten Längeneinheit und unabhängig davon, wie man die positive Richtung der Geraden fixiert.

Aufg. 3. Bestimme aus den Abscissen x_1 und x_2 von P_1 und P_2 die Abscissen der Punkte mit den Teilverhältnissen $0, 1, -1, \infty, \frac{2}{3}, 2, -2, -\frac{1}{2}$ und gieb die Lage dieser Punkte an.

§ 4. Doppelverhältnis. Harmonische Punkte.

Bei vielen Gelegenheiten ist es erforderlich, gleichzeitig die Teilverhältnisse zweier Punkte ins Auge zu fassen. Seien also zwei Punkte S_1 und S_2 gegeben, die mit einer Fundamentalstrecke P_1P_2 die Teilverhältnisse

$$\lambda_1 = \frac{P_1S_1}{S_1P_2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{P_1S_2}{S_2P_2}$$

bilden.

Man nennt dann den Quotienten $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ das Doppelverhältnis der vier Punkte P_1, P_2, S_1, S_2. Es ist positiv, wenn S_1 und S_2 entweder beide innerhalb oder beide aufserhalb der Fundamentalstrecke P_1P_2 liegen, dagegen negativ, wenn sich von den beiden Punkten S_1 und S_2 der eine innerhalb, der andere aufserhalb von P_1P_2 befindet. Wir wollen für das Doppelverhältnis $\frac{P_1S_1}{S_1P_2} : \frac{P_1S_2}{S_2P_2}$ die Bezeichnung $(P_1P_2S_1S_2)$ wählen, dabei aber genau auf die Reihenfolge achten, in der die vier Buchstaben auf einander folgen. In der Bezeichnung $(P_1P_2S_1S_2)$ bedeutet also der erste Buchstabe den Anfangspunkt und der zweite den Endpunkt der Fundamentalstrecke, der dritte Buchstabe den ersten Teilpunkt und der vierte den zweiten Teilpunkt. Wählt man demnach auf der Geraden vier beliebige Punkte A, B, C, D, so bedeutet $(ABCD)$ das Doppelverhältnis $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$, während beispielweise $(BCAD)$ das Doppelverhältnis

$\frac{BA}{AC} : \frac{BD}{DC}$ bedeuten würde, das man erhält, wenn man die Fundamentalstrecke BC das eine Mal durch A, das andere Mal durch D teilt.

Da man vier Buchstaben auf 24 verschiedene Arten auf einander folgen lassen kann, so geben vier Punkte zu 24 Doppelverhältnissen Veranlassung, die aber nicht alle von einander verschieden sind.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, wo die vier Punkte A, B, C, D so liegen, dafs ihr Doppelverhältnis $(ABCD) = -1$ ist. In diesem Falle sagt man, die vier Punkte bilden eine harmonische Gruppe oder sind harmonische Punkte. Man nennt überdies A und B einerseits, C und D andrerseits, zugeordnete Punkte und erkennt, dafs die beiden Paare A, B und C, D einander trennen, in dem Sinne, dafs, wenn ein Punkt eines Paares im Innern der von dem anderen Paare gebildeten Strecke liegt, der zugeordnete Punkt sich notwendig aufserhalb befinden mufs.

Ist $(ABCD) = -1$, so findet man durch Ausrechnen, dafs auch

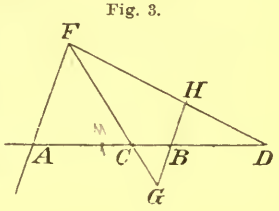
$$(1)\quad (ABCD) = (ABDC) = (BACD) = (BADC) = (CDAB) = (CDBA) = (DCAB) = (DCBA) = -1$$

ist. Bilden also A, B, C, D eine harmonische Gruppe, in dem Sinne, dafs zunächst $(ABCD) = -1$ ist, so kann man nicht nur jeden Punkt mit dem ihm zugeordneten vertauschen, sondern auch die beiden Paare zugeordneter Punkte mit einander und erhält immer wieder eine harmonische Gruppe. Es kommt also bei der Bildung einer solchen nur darauf an, welche Punkte einander zugeordnet werden, nicht aber, welches Paar oder welcher von zwei zugeordneten Punkten eines Paares vorangestellt wird. Man sagt daher auch, das Punktepaar A, B werde durch das Punktepaar C, D harmonisch getrennt, und erkennt, dafs dann auch A, B durch D, C, oder C, D durch B, A etc. harmonisch getrennt werden.

Ist ein Paar zugeordneter Punkte, etwa A, B, gegeben, so gehört zu jedem Punkte C ein ganz bestimmter zugeordneter

vierter harmonischer Punkt D. Um ihn zu konstruieren, ziehe man etwa durch A und B zwei beliebige Parallelen und durch C eine beliebige Transversale, die diese Parallelen in den Punkten F und G treffen möge. Macht man dann $BH = BG$, so führt die Verbindungslinie FH zu dem vierten harmonischen Punkte D. In der That bilden C und D entgegengesetzt gleiche Teilverhältnisse mit AB.

Fig. 3.



Wir werden später noch eine andere Konstruktion kennen lernen, die mit dem Lineal allein ausgeführt werden kann.

Schreibt man die Gleichung

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1$$

in der Form

$$AC \cdot BD = AD \cdot CB \tag{2}$$

und bezeichnet mit M den Mittelpunkt von AB, so folgt:

$$(AM + MC)\,(BM + MD) = (AM + MD)\,(CM + MB).$$

Berücksichtigt man aber, dafs $AM = MB = -BM$ ist, so ergiebt sich durch Ausrechnen:

$$MA^2 = MB^2 = MC \cdot MD. \tag{3}$$

Umgekehrt sieht man leicht ein, dafs, wenn diese Relation besteht, A, B, C, D harmonische Punkte sein müssen, denn die Gleichung liefert zu gegebenen A, B, C nur ein einziges D.

Aufg. 1. Man schreibe die 24 Doppelverhältnisse der vier Punkte A, B, C, D auf und überzeuge sich durch Ausrechnen, dafs sie in sechs Gruppen von je vier gleichen Doppelverhältnissen zerfallen.

Aufg. 2. Man zeige, dafs, wenn A, B, C, D eine harmonische Gruppe bilden, die 24 Doppelverhältnisse in drei Gruppen von je acht gleichen Doppelverhältnissen zerfallen. Den drei Gruppen entsprechen die Werte -1, 2, $\frac{1}{2}$.

Aufg. 3. A und B seien zwei zugeordnete Punkte einer harmonischen Gruppe A, B, C, D. Man überlege an Hand

der Figur und mit Rücksicht auf die Tabelle in § 3, wie sich D bewegt, wenn C die unendliche Gerade durchläuft. Wo liegt insbesondere D, wenn C mit A oder mit B oder mit dem Mittelpunkte von AB zusammenfällt?

Aufg. 4. Bringe Gl. (2) auf die Form $(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) = 0$, insofern x_1, x_2, x_3, x_4 die Abscissen von A, B, C, D, bezogen auf einen beliebigen Anfangspunkt, bedeuten. Durch Ausmultiplizieren ergiebt sich hieraus die Gleichung

$$2x_1x_2 - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + 2x_3x_4 = 0,$$

deren Symmetrie die in den Gleichungen (1) enthaltene Vertauschbarkeit von A mit B, oder C mit D, oder A und B mit C und D etc. direkt zum Ausdrucke bringt. Fällt der Anfangspunkt mit dem Mittelpunkte der Strecke AB zusammen, d. h. ist $x_1 = -x_2$, so folgt $x_1^2 = x_2^2 = x_3x_4$, d. h. Gl. (3).

Aufg. 5. Durch die Gleichung $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ wird jedem Punkte P mit der Abscisse x ein ganz bestimmter Punkt Q mit der Abscisse y zugeordnet. Zeige, dafs vier beliebige Punkte P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ mit den Abscissen x_i stets dasselbe Doppelverhältnis bilden wie ihre zugehörigen Q_i, d. h. dafs stets $\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} : \frac{y_4 - y_1}{y_2 - y_4} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4}$ ist. Wähle speziell $b = c = 0$ oder $a = d = 0$ etc.

Aufg. 6. Durch die Gleichung $axy + b(x + y) + c = 0$ wird jedem Punkte x ein bestimmter Punkt y zugeordnet. (Spezialfall von Aufg. 5). Zwei zusammengehörige Punkte sind vertauschbar, d. h. entspricht dem Punkte $x = u$ der Punkt $y = v$, so entspricht dem Punkte $x = v$ der Punkt $y = u$. Damit ein Punkt mit seinem entsprechenden zusammenfalle, ist notwendig und hinreichend, dafs $x = y$ sei. Die ursprüngliche Gleichung zwischen x und y geht dann über in

$$ax^2 + 2bx + c = 0,$$

deren beide Wurzeln — sie mögen r und s heifsen — die Abscissen solcher sich selbst entsprechender Punkte — man nennt sie Doppelpunkte — liefern. Mit Hülfe der bekannten

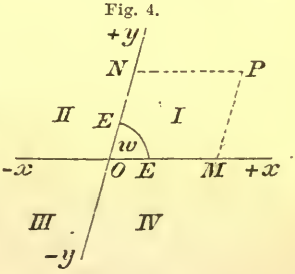
Relationen $r+s=-\frac{2b}{a}$ und $rs=\frac{c}{a}$ läfst sich die ursprüngliche Gl. $axy+b(x+y)+c=0$ dann leicht auf die Form $2xy-(x+y)(r+s)+2rs=0$ bringen, die aussagt, dafs je zwei entsprechende Punkte x und y mit den beiden Doppelpunkten r und s stets eine harmonische Gruppe bilden. Man sagt, die Punktreihe der x bilde mit der entsprechenden Punktreihe der y eine Involution. Aus Aufg. 5 ergiebt sich noch, dafs je vier harmonischen Punkten der einen Punktreihe stets wieder vier harmonische der andern entsprechen.

Aufg. 7. Wie gestaltet sich insbesondere die Involution, wenn die beiden Doppelpunkte r, s zusammenfallen, d. h. wenn $b^2-ac=0$ ist?

§ 5. Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene durch Koordinaten.

Bisher haben wir uns auf Punkte beschränkt, die auf einer und derselben Geraden lagen. Um nun in ähnlicher Weise auch die Lage der Punkte einer Ebene zu bestimmen, ziehen wir durch einen beliebigen Punkt O der Ebene zwei gerade Linien. Wir betrachten dann für die beiden Geraden im Sinne von § 1 den Punkt O als Anfangspunkt, wählen auf ihnen in derselben Entfernung von O je einen Einheitspunkt E und haben damit nicht nur für die beiden Geraden ein gemeinschaftliches Längenmafs OE geschaffen, sondern auch zugleich auf beiden eine positive und eine negative Richtung festgesetzt. Um die Vorstellungen zu fixieren, wollen wir die eine der beiden Geraden, die wir die Abscissenachse nennen, in horizontaler Lage voraussetzen und ihre positive Hälfte als nach rechts gerichtet annehmen. Die andere Gerade, die die Ordinatenachse heifst, ist dann gegen die erste unter einem gewissen Winkel w geneigt, ihre positive Hälfte werde als nach oben gerichtet angenommen. Ist jetzt ein beliebiger Punkt P der Ebene ge-

Fig. 4.



geben, so ziehe man durch ihn zwei Parallelen PM und PN zu den Achsen. Die Lage von P ist dann vollständig durch die Lage der Punkte M und N gegeben, die wir in § 1 durch ganz bestimmte Zahlen zu fixieren gelernt haben.

Man nennt die mit ihren Vorzeichen versehenen Achsenabschnitte OM und ON die Abscisse und die Ordinate des Punktes P, beide zusammen seine Koordinaten. Die Ordinate ON von P kann man auch durch die gleiche und gleichgerichtete Strecke MP ersetzen, wodurch die Parallele PN in der Figur entbehrlich wird. Der Punkt O heifst der Anfangspunkt der Koordinaten; seine Koordinaten sind gleich 0.

Man bezeichnet die Abscisse eines Punktes P meistens mit dem Buchstaben x, seine Ordinate mit y und nennt dem entsprechend auch die Abscissenachse die x-Achse, die Ordinatenachse die y-Achse. Sind mehrere Punkte gleichzeitig zu betrachten, so unterscheiden wir durch Indices: x, y; x_1, y_1; x_2, y_2; x', y' etc. bedeuten die Koordinaten der Punkte P; P_1; P_2; P' etc.

Wir wollen die Abscisse eines Punktes immer vor der Ordinate nennen, sodafs z. B. „der Punkt (a, b)“ der Punkt mit der Abscisse a und der Ordinate b ist.

Nach diesen Vorbereitungen erkennt man jetzt die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Jedem Punkte P der unbegrenzten Ebene entspricht ein ganz bestimmtes Zahlenpaar x, y, nämlich seine Koordinaten, und umgekehrt, jedem Zahlenpaare x, y entspricht ein ganz bestimmter Punkt P der Ebene, nämlich der, dessen Koordinaten jenen beiden Zahlen x, y gleich sind.

Durch die beiden Koordinatenachsen wird die ganze Ebene in vier Teile I, II, III, IV zerlegt. In I sind Abscisse und Ordinate eines jeden Punktes positiv, in II negativ und positiv, in III beide negativ und in IV positiv und negativ.

Je nachdem der von den positiven Halbachsen eingeschlossene Winkel w ein rechter ist oder nicht, spricht man von rechtwinkligen oder schiefwinkligen Koordinaten;

beide heifsen auch Parallelkoordinaten oder Cartesische Koordinaten (Cartesius 1596—1650).

Natürlich gelten alle Sätze, die sich auf schiefwinklige Systeme beziehen, auch für rechtwinklige, aber nicht umgekehrt. Wenn sich daher in der Folge eine Untersuchung speziell auf rechtwinklige Koordinaten beziehen soll, so wird dies stets besonders hervorgehoben werden; im andern Falle kann man rechtwinklige oder schiefwinklige Koordinaten der Betrachtung zu Grunde legen.

Aufg. 1.*) Bestimme die Punkte $(2,3)$; $(-1,4)$; $(-2,-\frac{1}{2})$; $(1,-5)$; $(\sqrt{\frac{1}{2}},\ -\sqrt{\frac{1}{2}})$.

Aufg. 2. Durch welche Koordinaten sind die Punkte der x-Achse und der y-Achse ausgezeichnet?

Aufg. 3. Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Koordinaten eines Punktes, der auf einer der beiden Geraden liegt, die die Winkel der Achsen halbieren?

Aufg. 4. Durch welche Koordinaten sind die Punkte einer Geraden charakterisiert, die zur x-Achse oder zur y-Achse parallel ist?

Aufg. 5. Durch O sei eine beliebige Gerade gezogen. Welche Relation besteht dann zwischen den Koordinaten x_1, y_1, und x_2, y_2 zweier Punkte P_1 und P_2 dieser Geraden?

Aufg. 6. Welches ist die gegenseitige Lage der Punkte (a, b); $(-a, -b)$; $(-a, b)$; $(a, -b)$?

Aufg. 7. Ein Punkt P besitze die Koordinaten x, y. Wie heifsen seine Koordinaten, wenn man die Achsenrichtungen wechselt, oder wenn man die frühere positive x-Achse neuerdings zur positiven y-Achse und die frühere positive y-Achse neuerdings etwa zur negativen x-Achse wählt, oder wenn man die Achsen irgendwie anders vertauscht?

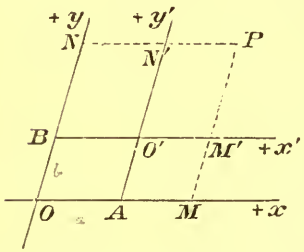
---

*) Bei den Zeichnungen bedient man sich, sobald rechtwinklige Koordinaten zur Anwendung kommen, zweckmäfsig eines in kleine Quadrate eingeteilten Papieres.

§ 6. Koordinatentransformation durch Verlegung des Anfangspunktes. (Parallelverschiebung.)

In einem beliebigen Koordinatensysteme mit dem Anfangspunkte O seien zwei Punkte P und O' mit den Koordinaten x, y und a, b gegeben. Man lege durch O' ein neues Koordinatensystem, dessen positive Halbachsen parallel und gleichgerichtet mit den positiven Halbachsen des alten Systemes sind, sodafs das eine System mit dem andern nach Lage und Richtung der Halbachsen durch blofse Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden kann. Der Punkt P besitzt dann in Bezug auf das neue System zwei Koordinaten $O'M'$ und $O'N'$, die mit x' und y' bezeichnet werden mögen. Dem entsprechend wollen wir die neuen durch O' gehenden Achsen auch die x'-Achse und y'-Achse nennen. Aus der Figur entnimmt man dann, da in Bezug auf Gröfse und Richtung $O'M' = AM = OM - OA$ und $O'N' = BN = ON - OB$ ist, die Transformationsformeln:

Fig. 5.



$$(1) \qquad x' = x - a, \quad y' = y - b,$$

oder:

$$(2) \qquad x = x' + a, \quad y = y' + b.$$

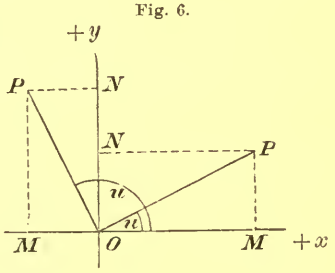
Aufg. 1. Man überzeuge sich, dafs diese Relationen zwischen den alten und den neuen Koordinaten stets gelten, in welchen der vier Teile der Ebene auch O' und P liegen und welche gegenseitige Lage sie auch zu einander haben mögen.

Aufg. 2. In einem rechtwinkligen Koordinatensysteme seien die Koordinaten eines Punktes (x, y) durch die Relation $x^2 + y^2 = r^2$ verbunden. In welche Relation verwandelt sich diese, wenn man bei unveränderten Achsenrichtungen den Punkt (p, q) zum Anfangspunkte wählt?

§ 7. Polarkoordinaten.

In Bezug auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz sei ein Punkt P durch seine Koordinaten $OM = x$, $ON = y$ gegeben. (In der Figur sind absichtlich zwei Punkte mit denselben Bezeichnungen gewählt, damit man erkenne, dafs die folgenden Erörterungen von der speziellen Lage des Punktes ganz unabhängig sind. Der Leser möge also den einen oder den andern der beiden Punkte der Betrachtung zu Grunde legen.) In dem rechtwinkligen Dreiecke OMP sind die beiden Katheten $OM = x$, $MP = y$; die Hypotenuse, also die Entfernung des Punktes P vom Anfangspunkte, werde mit r und der Winkel, den r mit der positiven x-Achse einschliefst, mit u bezeichnet. Dabei wollen wir genauer unter u den Winkel verstehen, um den sich die positive x-Achse im positiven Sinne drehen mufs, um mit dem Halbstrahle OP zusammenzufallen. // Unter dem positiven Sinne verstehen wir dabei ein für allemal den Drehungssinn, in dem sich die positive x-Achse um den Anfangspunkt O drehen mufs, um, den ersten Quadranten durchstreichend, nach der positiven y-Achse zu gelangen.

Fig. 6.



Aus dem rechtwinkligen Dreiecke OMP folgt jetzt:

$$(1) \qquad x = r\cos u, \quad y = r\sin u,$$

und diese Gleichungen gelten, in welchem der vier Quadranten auch P angenommen werde, wenn man nur berücksichtigt, dafs $\cos u$ und $\sin u$ in den vier verschiedenen Quadranten dieselben Vorzeichenkombinationen darbieten wie x und y. Die Entfernung r wird dabei stets als positiv angesehen.

Aus den Gleichungen (1) ergiebt sich durch Auflösen:

$$(2) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos u = \frac{x}{r}, \quad \sin u = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg} u = \frac{y}{x},$$

wie auch unmittelbar die Figur zeigt.

Man nennt r und u die Polarkoordinaten von P, speziell r den Radius Vektor, u die Anomalie von P. Die Gröfsen r und u bestimmen die Lage von P ebenso eindeutig wie x und y. Es folgt dies direkt aus der Figur, aber auch daraus, dafs sich vermöge der Gleichungen (1) und (2) x und y durch r und u, und umgekehrt, in eindeutiger Weise bestimmen lassen. Der Radius r kann alle Werte von 0 bis ∞ annehmen, die Anomalie u alle Werte von 0^0 bis 360^0.

Aufg. 1. Wo liegen alle die Punkte, für die $r = a$, oder alle die Punkte, für die $u = u_0$ ist, insofern a und u_0 gegebene feste Werte besitzen?

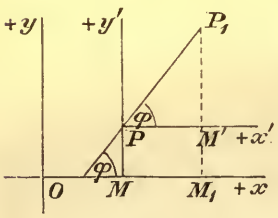
Aufg. 2. Welches sind die Polarkoordinaten der Punkte $(2, 0)$; $(0, 3)$; $(-4, 0)$; $(0, -1)$; $(3, -3)$; $(1, 1)$; $(-2, 2)$?

Aufg. 3. Welches sind die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte, deren Polarkoordinaten $r = 1$, $u = 45^0$; $r = 3$, $u = 210^0$; $r = 2$; $u = 315^0$ sind?

§ 8. Aus den rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte P und P_1 ihre Entfernung und die Neigung ihrer Verbindungslinie gegen die x-Achse zu bestimmen.

Die als positiv gedachte Entfernung PP_1 werde mit d bezeichnet, der Winkel, den PP_1 mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, mit φ. Dabei wollen wir genauer unter dem Winkel, den eine Gerade mit der positiven Richtung der x-Achse bildet und der also die Richtung der Geraden bestimmt, den Winkel verstehen, den die x-Achse, im positiven Sinne um ihren Schnittpunkt mit der Geraden sich drehend, beschreiben mufs, um in die Lage jener Geraden zu gelangen. Der Winkel φ wird auch kurz der Neigungswinkel der Geraden genannt.

Fig. 7.



Wir legen durch P als Anfangspunkt ein neues Koordinatensystem parallel und gleichgerichtet mit dem alten (§ 6). Sind dann x, y und x_1, y_1 die gegebenen, auf das alte System bezogenen Koordinaten von P und P_1, so werden jetzt

die Koordinaten von P_1 in Bezug auf das neue System lauten:

$$x' = x_1 - x, \quad y' = y_1 - y.$$

Da aber die zu bestimmenden Gröfsen d und φ im Sinne von § 7 gleichzeitig die Polarkoordinaten von P_1 in Bezug auf das neue System sind*), so ist:

$$(1) \qquad d = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y'}{x'},$$

folglich:

$$(2) \qquad d = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$

Durch diese Formeln werden, mit Berücksichtigung der für φ getroffenen Festsetzung, d und φ eindeutig bestimmt. Zu beachten ist noch, dafs die Formeln sich nicht ändern, wenn man x_1, y_1 mit x, y vertauscht; es ist daher gleichgültig, welchen der beiden Punkte man als ersten betrachtet.

Aufg. 1. Man bestimme die Entfernung der beiden Punkte $(5, -3)$; $(-2, 1)$ und den Winkel φ ihrer Verbindungslinie.

Aufg. 2. Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks seien $(2, 1)$; $(-5, 3)$; $(1, -4)$. Man bestimme die Längen und die Richtungen der drei Seiten.

Aufg. 3. (x_1, y_1) und (x_2, y_2) seien zwei feste Punkte. Welche Gleichung mufs zwischen den Koordinaten x, y eines Punktes bestehen, damit er von jenen beiden Punkten gleiche Abstände habe? Wo liegen alle diese Punkte?

Aufg. 4. Auf der x-Achse seien die beiden Punkte A und A', mit den Abscissen a und $-a$, auf der y-Achse B und B', mit den Ordinaten b und $-b$, gegeben. Man bestimme die Richtungen der Seiten des Parallelogrammes $ABA'B'$.

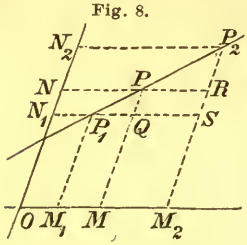
---

*) Nach der vorhergehenden Festsetzung bedeutet φ immer einen Winkel zwischen 0° und 180°. Unter Umständen ist daher die Anomalie von P_1 in Bezug auf das neue System nicht φ, sondern $180^\circ + \varphi$; da aber $\operatorname{tg}(180^\circ + \varphi) = \operatorname{tg}\varphi$ ist, so gelten die Formeln für d und $\operatorname{tg}\varphi$ doch ganz allgemein.

§ 9. Aus den Koordinaten zweier Punkte P_1 und P_2 die Koordinaten des Punktes P der Verbindungslinie zu finden, der mit der Strecke P_1P_2 ein gegebenes Teilverhältnis bildet.

Da das Teilverhältnis unabhängig davon ist, welche Richtung der Geraden P_1P_2 man als die positive ansieht (§ 3, Aufg. 2), so wollen wir uns einer besonderen Festsetzung darüber enthalten und nur berücksichtigen, dafs Strecken, die in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden (wie etwa P_1P_2 und P_2P_1), mit entgegengesetzten Zeichen zu versehen sind.

Fig. 8.



Eine aufmerksame Betrachtung der Figur zeigt nun, dafs mit Rücksicht sowohl auf die absoluten Längen wie auf die Vorzeichen der betreffenden Strecken die Proportion gilt:

$$P_1P : PP_2 = M_1M : MM_2 = N_1N : NN_2,$$

d. h. dafs M_1M_2 durch M und N_1N_2 durch N in demselben Teilverhältnisse λ geteilt werden wie P_1P_2 durch P. Nach § 3 ist dann aber das x von M gleich $\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$ und dem entsprechend das y von N gleich $\frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$. Es sind daher die Koordinaten von P:

$$(1) \qquad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Umgekehrt findet man hieraus wieder:

$$(2) \qquad \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}.$$

Durchläuft λ in den Gleichungen (1) alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so durchläuft der Punkt (x, y) die ganze durch P_1 und P_2 bestimmte gradlinige Punktreihe. Insbesondere erhält man für $\lambda = 1$ die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke P_1P_2, nämlich $\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{y_1 + y_2}{2}$.

Aufg. 1. Zeige, dafs die Gleichungen (1) für die Punkte der Geraden P_1P_2 charakteristisch sind und folglich keinem aufserhalb gelegenen Punkte zukommen. Wählt man nämlich einen ganz beliebigen Punkt der Ebene, so kann man auf der Geraden P_1P_2 stets einen Punkt Q angeben, der dieselbe Abscisse, und einen Punkt R, der dieselbe Ordinate hat wie P. Bilden Q und R mit P_1P_2 die Teilverhältnisse λ und μ, so gelten für die Koordinaten x, y von P die Gleichungen $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \mu y_2}{1+\mu}$. Die Punkte der Geraden P_1P_2, und nur diese, sind dann durch $\lambda = \mu$, d. h. durch die Gl. (1) ausgezeichnet. Dasselbe gilt daher auch für die Gl. $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$.

Aufg. 2. Man bestimme die Teilverhältnisse der Punkte, in denen die Gerade P_1P_2 die Achsen und ihre beiden Winkelhalbierenden schneidet. (§ 5, Aufg. 2 und 3.)

Aufg. 3. Ein Dreieck ist gegeben durch die Koordinaten (2, 5); (— 3, 7); (1, — 2) seiner Ecken. Man bestimme die Koordinaten der Mittelpunkte der Seiten.

Aufg. 4. Der Schwerpunkt S einer Dreiecksfläche teilt die Verbindungslinie P_1R_1 einer Ecke P_1 mit dem Mittelpunkte R_1 der Gegenseite bekanntlich in dem Verhältnisse 2 : 1. Man soll die Koordinaten von S aus den Koordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 von P_1, P_2, P_3 berechnen.

Aufg. 5. Man suche für das Dreieck (2, — 5); (1, 2); (— 3, 4) die Koordinaten des Punktes, in dem sich die Verbindungslinien der Ecken mit den Mittelpunkten der Gegenseiten, die sogenannten Mittellinien, treffen. (Der gesuchte Punkt ist der Schwerpunkt.)

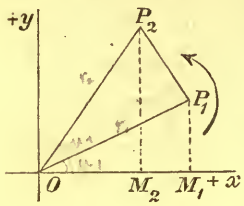
Aufg. 6. Durch die Ecken (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) eines Dreiecks ziehe man Parallelen zu den Gegenseiten und bestimme die Koordinaten der Ecken des so entstehenden Dreiecks.

Aufg. 7. In welcher Beziehung steht der Punkt (x, y) zu dem Punkte $\left(\frac{x}{1+\lambda}, \frac{y}{1+\lambda}\right)$?

§ 10. Den Inhalt des Dreiecks zu bestimmen, das der Anfangspunkt mit zwei Punkten P_1 und P_2 bildet.

Die Punkte P_1 und P_2 mögen die rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1; x_2, y_2 und die Polarkoordinaten r_1, u_1; r_2, u_2 besitzen. Sei zunächst $u_2 > u_1$, sodafs die Punkte O, P_1, P_2, wie in der Figur, im positiven Drehungssinne aufeinander folgen. Dann ist der Inhalt J des Dreiecks OP_1P_2 gleich:

Fig. 9.



$$J = \tfrac{1}{2} r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)$$
$$= \tfrac{1}{2} r_1 r_2 (\sin u_2 \cos u_1 - \cos u_2 \sin u_1),$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln (2) von § 7:

$$J = \tfrac{1}{2} r_1 r_2 \left(\frac{y_2}{r_2} \frac{x_1}{r_1} - \frac{x_2}{r_2} \frac{y_1}{r_1} \right),$$

d. h.:

$$J = \tfrac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1). \tag{1}$$

Ist dagegen $u_1 > u_2$, d. h. folgen die Punkte O, P_1, P_2 im negativen Drehungssinne aufeinander, so ist:

$$J = \tfrac{1}{2} r_1 r_2 \sin(u_1 - u_2),$$

und man erhält alsdann:

$$J = \tfrac{1}{2} (x_2 y_1 - x_1 y_2) = -\tfrac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1). \tag{2}$$

Um nun diese lästige Unterscheidung, ob u_2 gröfser oder kleiner ist als u_1, zu vermeiden, wollen wir ein für allemal festsetzen, dafs der Inhalt des Dreiecks OP_1P_2 (man beachte die Reihenfolge der Buchstaben) durch die einzige Formel

$$J = \tfrac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1) \tag{3}$$

gegeben werde.

Diese Festsetzung enthebt uns dann aber nicht nur jener Unterscheidung, sondern sie liefert zugleich eine wesentliche Vervollständigung unsrer Erkenntnis:

Der absolute Wert des Ausdrucks $\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$ giebt uns den absoluten Flächeninhalt des in Rede stehenden Drei-

ecks an; gleichzeitig aber belehrt uns, ohne daſs wir nötig haben, die Figur anzuschauen, das Vorzeichen des Ausdrucks, in welchem Sinne die Punkte O, P_1, P_2, aufeinander folgen. Ist nämlich $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$ positiv, so ist dies ein Zeichen dafür, daſs die Punkte O, P_1, P_2 im positiven Sinne aufeinander folgen; ist dagegen dieser Ausdruck negativ, so schlieſsen wir, daſs das Dreieck im negativen Sinne durchlaufen wird, wenn wir von O über P_1 nach P_2 gelangen.

Liegen die Punkte O, P_1, P_2 in einer Geraden, so ist $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$, und umgekehrt.

Aufg. 1. Man zeichne verschiedene Dreiecke OP_1P_2 (mit Berücksichtigung aller Quadranten) und übe sich, das Vorzeichen der einzelnen Dreiecke jedesmal aus der Figur abzulesen. Die Dreiecke OP_2P_1 haben dann immer das entgegengesetzte Zeichen.

Aufg. 2. Zeige, daſs infolge unsrer Festsetzung der Inhalt des Dreiecks OP_2P_1 durch $\frac{1}{2}(x_2y_1 - x_1y_2)$ dargestellt wird.

Aufg. 3. P_1 und P_2 mögen die Koordinaten $-5, 1$ und $3, 4$ besitzen. Berechne den Inhalt des Dreiecks OP_1P_2 und diskutiere das Vorzeichen.

Aufg. 4. Berechne den Inhalt des Dreiecks $(0, 0)$; $(a, 0)$; $(0, b)$.

Aufg. 5. P_1 habe die Koordinaten $2, 3$; auf welcher Seite der Geraden OP_1 liegt der Punkt P_2 mit den Koordinaten $4, 3$?

Aufg. 6. Drücke die Bedingung dafür aus, daſs der Punkt mit den Koordinaten x, y auf der Verbindungslinie von O mit (x_1, y_1) liegt.

Aufg. 7. Beweise, daſs bei schiefwinkligen Koordinaten mit dem Achsenwinkel w der Inhalt des Dreiecks OP_1P_2 durch $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) \sin w$ dargestellt wird. Es ist nämlich, wenn dieselben Bezeichnungen wie im Texte benutzt werden,

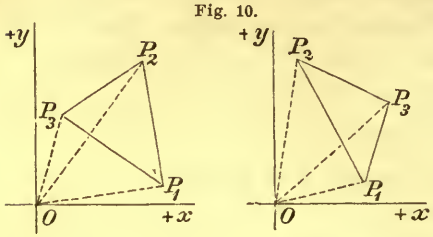
$$\sin u_1 = \frac{y_1 \sin w}{r_1}, \quad \cos u_1 = \frac{x_1 + y_1 \cos w}{r_1} \text{ etc.}$$

§ 11. Den Inhalt eines beliebigen Dreiecks $P_1P_2P_3$ aus den Koordinaten seiner Ecken zu berechnen.

Man verbinde die drei Punkte P_1, P_2, P_3, deren rechtwinklige Koordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 seien, mit dem Anfangspunkte O, so erhält man drei Dreiecke OP_1P_2, OP_2P_3, OP_3P_1, deren Inhalte durch

$$\tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1),$$
$$\tfrac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2),$$
$$\tfrac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_3)$$

Fig. 10.



bestimmt sind. Nimmt man nun jedes der Dreiecke mit dem ihm zukommenden Vorzeichen und bezeichnet die Inhalte der Dreiecke $P_1P_2P_3$, OP_1P_2, OP_2P_3, OP_3P_1 kurz mit J, J_{12}, J_{23}, J_{31}, so zeigt eine aufmerksame Betrachtung der Figur, dafs stets, wie auch das Dreieck $P_1P_2P_3$ liegen mag, die Gleichung gilt:

$$J = J_{12} + J_{23} + J_{31}, \tag{1}$$

wenn nur die Vorzeichen richtig beachtet werden, und dafs ferner J positiv oder negativ ausfällt, je nachdem P_1, P_2, P_3 im positiven Sinne (wie bei der ersten Figur), oder im negativen Sinne (wie bei der zweiten Figur) aufeinander folgen.

Indem wir so für den Flächeninhalt J des Dreiecks $P_1P_2P_3$ (man beachte die Reihenfolge der Buchstaben) stets die Formel erhalten:

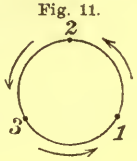
$$J = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3), \tag{2}$$

erkennen wir, dafs uns dieser Ausdruck für J nicht nur durch seinen absoluten Wert den absoluten Flächeninhalt des Dreiecks angiebt, sondern auch gleichzeitig durch sein Vorzeichen, in welchem Sinne die drei Punkte P_1, P_2, P_3 aufeinander folgen. Die in § 10 getroffene Festsetzung macht also unsere Formeln inhaltsreicher.

Anmerkung. Bei dem Bau der für J gefundenen Formel tritt eine gewisse Gesetzmäfsigkeit zu Tage, der wir noch

vielfach begegnen werden und die namentlich auch für das Gedächtnis eine Erleichterung bietet. Man bemerkt nämlich, dafs die beiden Summanden $x_2 y_3 - x_3 y_2$ und $x_3 y_1 - x_1 y_3$ dadurch aus dem ersten Summanden $x_1 y_2 - x_2 y_1$ hervorgehen, dafs man die Indices 1, 2, 3 durch 2, 3, 1 oder 3, 1, 2 ersetzt. Die nebenstehende Figur rechtfertigt die Bezeichnung „cyklische Vertauschung“ der Indices.

Fig. 11.



Aufg. 1. Man leite die Formel für J dadurch ab, dafs man durch P_3 ein neues Achsensystem parallel und gleichgerichtet mit dem alten einführt und dann auf die neuen Koordinaten $x_1' = x_1 - x_3$, $y_1' = y_1 - y_3$ und $x_2' = x_2 - x_3$, $y_2' = y_2 - y_3$ von P_1 und P_2 die Formel $J = \frac{1}{2}(x_1' y_2' - x_2' y_1')$ anwendet.

Aufg. 2. Man lege durch einen beliebigen Punkt O' mit den Koordinaten a, b ein neues Achsensystem parallel und gleichgerichtet mit dem alten und beweise, dafs in dem neuen Systeme die Formel für J genau denselben Flächeninhalt ergiebt wie in dem alten, dafs sie also von dem Koordinatensysteme unabhängig ist.

Aufg. 3. Man bestimme den Inhalt des Dreiecks (3, 1); (4, — 2); (— 1, — 2) und diskutiere das Vorzeichen.

Aufg. 4. Man überzeuge sich, dafs die Dreiecke $P_2 P_3 P_1$ und $P_3 P_1 P_2$ dasselbe Vorzeichen haben wie $P_1 P_2 P_3$, dafs dagegen den Dreiecken $P_1 P_3 P_2$, $P_2 P_1 P_3$, $P_3 P_2 P_1$ das entgegengesetzte Zeichen zukommt.

Aufg. 5. Welche Bedingung mufs zwischen den Koordinaten der drei Punkte P_1, P_2, P_3 stattfinden, damit diese in einer Geraden liegen?

Aufg. 6. Liegen die Punkte (1, — 2); (— 3, 2); (4, — 1) in einer Geraden?

Aufg. 7. Zeige, dafs der Inhalt des Dreiecks, das der Punkt (x, y) mit den Punkten $(0, b)$ und $(a, 0)$ bildet, durch $\frac{1}{2} ab\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)$ dargestellt wird. Was würde aus dem Verschwinden des Klammerausdrucks folgen?

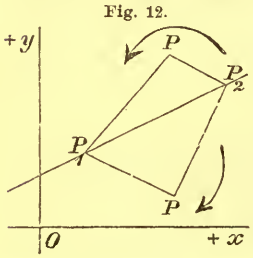
Aufg. 8. Beweise, dafs für schiefwinklige Koordinaten der Inhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ durch

$$\tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3) \sin w$$

ausgedrückt wird (§ 10, Aufg. 7).

§ 12. Folgerungen. Kriterien für die Lage eines Punktes in Bezug auf eine Gerade.

In einem rechtwinkligen Koordinatensysteme sei eine Gerade durch die beiden Punkte P_1, P_2 gegeben. Sie zerlegt die ganze Ebene in zwei Teile, die wir auf Grund unsrer Festsetzungen in folgender Weise von einander zu unterscheiden im Stande sind. Alle Punkte P auf der einen Seite der Geraden sind dadurch ausgezeichnet, dafs in den zugehörigen Dreiecken die Ecken P_1, P_2, P stets im positiven Sinne, alle Punkte P auf der anderen Seite der Geraden dadurch, dafs in den zugehörigen Dreiecken die Ecken P_1, P_2, P stets im negativen Sinne aufeinander folgen. Wählen wir daher auf der ersten Seite, die wir kurz die positive nennen wollen, einen beliebigen Punkt P mit den Koordinaten x, y und bilden (indem wir jetzt x_3, y_3 durch x, y ersetzen) den Ausdruck



$$(1) \qquad J = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y - xy_2 + xy_1 - x_1y),$$

so wird dieser Ausdruck allemal positiv ausfallen; nehmen wir dagegen einen Punkt P mit den Koordinaten x, y auf der andern Seite, die wir als die negative bezeichnen können, so wird der entsprechende Ausdruck stets mit dem negativen Zeichen behaftet sein. Wir besitzen also in dem Ausdrucke

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y - xy_2 + xy_1 - x_1y,$$

dem wir auch die Form

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1y_2 - x_2y_1$$

geben können, ein wichtiges Unterscheidungsmittel für die beiden Seiten der Geraden P_1P_2. Für jedes Wertepaar x, y nimmt der charakteristische Ausdruck einen ganz bestimmten

Wert an und zwar einen positiven für alle Punkte der einen Seite, einen negativen für alle Punkte der andern Seite. Bedeutet (x, y) einen Punkt der Geraden P_1P_2 selbst, so wird der Ausdruck (der ja den doppelten Flächeninhalt des entsprechenden Dreiecks darstellt) allemal Null, und umgekehrt, wenn der Ausdruck gleich Null wird, so ist dies ein sicheres Zeichen dafür, dafs der Punkt (x, y) auf der Geraden liegt.

Es ist daher

$$(2) \qquad x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

eine Gleichung, die allemal, aber auch nur dann, erfüllt wird, wenn x, y die Koordinaten eines Punktes der Geraden bedeuten.

Aufg. 1. Beweise, dafs der zuletzt ausgesprochene Satz unverändert auch für schiefwinklige Koordinaten gilt.

Aufg. 2. P_1, P_2, P mögen die rechtwinkligen Koordinaten 2, 5; — 3, 4; 1, 1 haben. Auf welcher Seite der Geraden P_1P_2 liegt der Punkt P? Liegt der Anfangspunkt O auf derselben Seite?

Aufg. 3. Prüfe, ob die Punkte (1, — 1); (— 2, 5); (7, — 6); $(\frac{1}{2}, -2)$ auf der Geraden P_1P_2 der vorhergehenden Aufgabe liegen.

Aufg. 4. In welchen Punkten trifft dieselbe Gerade P_1P_2 die Achsen und ihre Winkelhalbierenden (§ 5, Aufg. 2 und 3.)

Aufg. 5. Welcher Gleichung genügen die Koordinaten eines jeden Punktes der Geraden P_1P_2, wenn P_1 und P_2 die Koordinaten 4, 2 und — 3, 7 haben?

§ 13. Den Inhalt eines Vielecks aus den Koordinaten seiner Ecken zu berechnen.

Die n Ecken $P_1, P_2 \ldots P_n$ mögen die rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; $\ldots$ x_n, y_n besitzen. Verbindet man, wie in § 11, die n Eckpunkte mit dem Anfangspunkte O, so erhält man n Dreiecke OP_1P_2, OP_2P_3, $\ldots$ OP_nP_1. Bei genauer Berücksichtigung der Vorzeichen aller dieser Dreiecke ergiebt sich, als einfache Ausdehnung der in § 11 gewonnenen Resultate, für den Inhalt J die Formel:

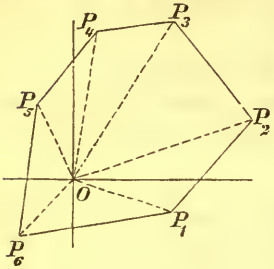
(1) $$J = OP_1P_2 + OP_2P_3 + \cdots + OP_nP_1,$$

folglich:

(2) $$J = \tfrac{1}{2}\{x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \cdots + x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1} + x_ny_1 - x_1y_n\},$$

und zwar ist dieser Ausdruck positiv oder negativ, je nachdem die Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$ im positiven oder im negativen Sinne aufeinander folgen. Die für J gefundene Formel bleibt bestehen, auch wenn das Vieleck einspringende Ecken hat oder ein überschlagenes ist.

Fig. 18.



In manchen Fällen ist es praktisch, die Gleichung (2) in der Form zu benutzen

(3) $$2J = x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + \cdots + x_n(y_1 - y_{n-1}).$$

Aufg. 1. Man beweise (wie § 11, Aufg. 2), dafs die Formel für J von dem Koordinatensysteme unabhängig ist.

Aufg. 2. Bestimme den Inhalt des Vierecks $(1, 2); (-3, 4); (-1, -1); (3, -2)$.

Aufg. 3. Beweise, dafs für schiefwinklige Koordinaten in dem Ausdrucke für J einfach der Faktor $\sin w$ hinzutritt.

Aufg. 4. Bestimme für schiefwinklige Koordinaten ($w = 60^0$) den Inhalt des Vierecks $(2, 1); (4, -3); (-2, -5); (-1, 4)$.

Auf. 5. Bestimme für rechtwinklige Koordinaten den Inhalt des Achtecks

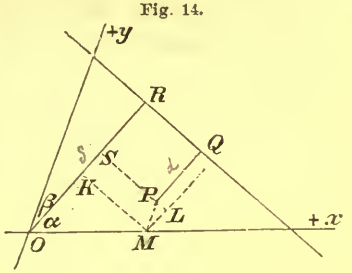
$$(1, 0); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); (0, 1); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); (-1, 0);$$
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); (0, -1); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

§ 14. Bestimmung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden.

Die Lage einer Geraden ist vollständig bestimmt, wenn man ihren Abstand δ vom Anfangspunkte eines beliebigen Koordinatensystemes und den Winkel α kennt, den δ mit der

positiven Richtung der x-Achse einschliefst. Unter α verstehen wir dabei genauer den Winkel zwischen 0^0 und 360^0, um den sich die positive x-Achse im positiven Sinne drehen mufs, um mit dem durch die Richtung $OR = \delta$ bestimmten Halbstrahle zusammenzufallen. Der Abstand δ, den wir stets als positiv ansehen, schliefst dann mit der positiven y-Achse den Winkel $\beta = w - \alpha$ ein, insofern w den Achsenwinkel bedeutet.

Fig. 14.



In der Figur ist PQ der zu bestimmende Abstand d des durch seine Koordinaten x, y gegebenen Punktes P von der durch δ und α bestimmten Geraden. Man liest dann unmittelbar die Relation $d = OR - OS = \delta - OS$ ab. Nun ist:

$$OS = OK + KS = OK + ML.$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken OMK, mit dem Winkel α bei O, und MLP, mit dem Winkel β bei M, folgt dann aber:

$$OK = OM \cos \alpha = x \cos \alpha,$$

$$ML = MP \cos \beta = y \cos \beta,$$

also:

$$OS = x \cos \alpha + y \cos \beta$$

und daher:

$$(1) \qquad d = -(x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta).$$

Hätten wir in der Figur den Punkt P auf der andern Seite der Geraden gewählt, so wäre bei analoger Bezeichnung $d = OS - OR$, und wir hätten dann die Formel

$$(2) \qquad d = +(x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta)$$

erhalten.

Um nun diese Unterscheidungen zu vermeiden, wollen wir ein für allemal festsetzen, dafs der Abstand eines durch seine Koordinaten x, y gegebenen Punktes P von der durch δ und α charakterisierten Geraden durch die einzige Formel

$$(3) \qquad d = -(x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta)$$

dargestellt werde. Auch hier enthebt uns diese Festsetzung nicht

nur jener lästigen Unterscheidung, sondern sie macht auch die Formel inhaltsreicher: Durch den absoluten Wert von d erhalten wir die absolute Länge des gesuchten Abstandes, gleichzeitig aber giebt uns das Vorzeichen von d an, auf welcher Seite der Geraden der Punkt P liegt. Ist d positiv, so befindet sich P auf derselben Seite wie der Anfangspunkt O, die von P und O gefällten Lote d und δ sind dann gleichgerichtet; ist d dagegen negativ, so liegt P auf der entgegengesetzten Seite, d und δ sind entgegengesetzt gerichtet. Die Gerade trennt also die Punkte, für die der Ausdruck

$$d = -(x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta)$$

einen positiven Wert besitzt, von denen, für die er einen negativen Wert annimmt.

Die Punkte der Geraden selbst, und nur diese, sind durch $d = 0$ ausgezeichnet. Der Ausdruck $x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta$ verschwindet daher jedesmal, aber auch nur dann, wenn x, y die Koordinaten eines Punktes der Geraden sind, oder:

Die Gleichung $x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta = 0$ ist eine Gleichung, die von den Koordinaten x, y eines jeden Punktes der Geraden, aber auch nur von solchen, erfüllt wird.

Ist das Koordinatensystem rechtwinklig, also $\beta = 90^0 - \alpha$, so ist $d = -(x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta)$, und die eben besprochene charakteristische Gleichung lautet dann:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0.$$

Aufg. 1. Diskutiere die Lage der vier Geraden, die durch $\delta = 5$ und $\alpha = 30^0$, 120^0, 210^0 und 300^0 ausgezeichnet sind.

Aufg. 2. In einem rechtwinkligen Systeme sei eine Gerade durch $\delta = 2$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ bestimmt. Welchen Abstand von ihr hat der Punkt $(-3, 5)$? Interpretiere das Zeichen.

Aufg. 3. Welcher Gleichung genügen die Koordinaten eines jeden Punktes der vorhergehenden Geraden?

Aufg. 4. Liegen die Punkte $(1, 1)$; $(-2, 6)$; $(3, -2)$ auf jener Geraden?

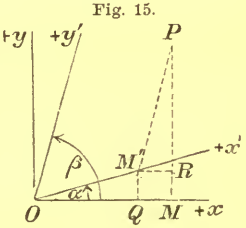
Aufg. 5. In welchen Punkten trifft jene Gerade die Achsen und ihre beiden Winkelhalbierenden?

§ 15. Übergang von einem rechtwinkligen Achsensysteme zu einem schiefwinkligen.

Durch den Anfangspunkt O eines rechtwinkligen Koordinatensystemes seien zwei Strahlen Ox' und Oy' gezogen, die wir als die positiven Richtungen eines schiefwinkligen Koordinatensystemes auffassen wollen. Ox' und Oy' mögen mit der positiven Richtung der x-Achse die Winkel α und β bilden, worunter, wie in § 7 und § 14, genauer die Winkel verstanden werden sollen, um die sich die positive x-Achse im positiven Sinne drehen mufs, um mit den Halbstrahlen Ox' und Oy' zusammenzufallen.

Die Koordinaten eines beliebigen Punktes P seien in Bezug auf das rechtwinklige System $OM = x$, $MP = y$, in Bezug auf das schiefwinklige System $OM' = x'$, $M'P = y'$. Man soll den Zusammenhang zwischen den rechtwinkligen und den schiefwinkligen Koordinaten von P angeben.

Fig. 15.



Aus der Figur folgt:

$$x = OQ + M'R,$$
$$y = QM' + RP.$$

Die rechtwinkligen Dreiecke OQM', mit dem Winkel α bei O, und $M'RP$, mit dem Winkel β bei M', lassen aber erkennen, dafs

$$OQ = x' \cos\alpha, \quad QM' = x' \sin\alpha,$$
$$M'R = y' \cos\beta, \quad RP = y' \sin\beta$$

ist. Es ergeben sich daher die Transformationsformeln:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos\beta, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \sin\beta. \end{aligned}$$

Für $\beta = 90^0 + \alpha$ ist das System Ox', Oy' ebenfalls ein rechtwinkliges, und man erhält dann:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \end{aligned}$$

Aufg. 1. In einem rechtwinkligen Achsensysteme mögen die Koordinaten eines Punktes der Relation $x^2 + y^2 = r^2$ ge-

nügen. In welche andere Relation verwandelt sich diese, wenn man als neue Achsen Ox' und Oy' die Winkelhalbierenden der alten Achsen wählt? (Da $\alpha = 45^0$ ist, hat man einfach

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

zu setzen.)

Aufg. 2. In einem rechtwinkligen Systeme mögen die Koordinaten eines Punktes der Relation $x^2 - y^2 = a^2$ genügen. In welche andere Relation verwandelt sich diese, wenn man die Winkelhalbierenden als neue Achsen wählt?

Aufg. 3. In einem rechtwinkligen Systeme mögen die Koordinaten eines Punktes der Relation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ genügen. Man wähle ein neues schiefwinkliges Achsensystem, dessen Winkel α und β durch die Relation

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2} = 0$$

mit einander verbunden sind. Zeige, dafs die zwischen x und y bestehende Gleichung in $\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$ übergeht, wenn zur Abkürzung $\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{1}{a'^2}$, $\frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2} = \frac{1}{b'^2}$ gesetzt wird.

Zweites Kapitel.

Die gerade Linie.

§ 16. Definition der Gleichung einer Geraden. Die Gerade sei bestimmt durch zwei Punkte.

Wir sahen in § 12, dafs, wenn in einem rechtwinkligen Koordinatensysteme eine Gerade durch zwei Punkte P_1 und P_2 gegeben ist, allemal eine Gleichung, nämlich

$$(1) \qquad x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0,$$

existiert, die befriedigt wird von den Koordinaten x, y eines jeden Punktes P der Geraden, und nur von diesen. Die

geometrische Bedeutung dieses Satzes ist dabei die folgende: Die linke Seite der Gleichung stellt den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks P_1P_2P dar und wird daher allemal, aber auch nur dann, verschwinden, wenn der Punkt P auf der Geraden P_1P_2 liegt. Sonst hat die linke Seite der Gleichung immer einen von Null verschiedenen Wert und zwar einen positiven für alle Punkte auf der einen, einen negativen für alle Punkte auf der andern Seite der Geraden P_1P_2.

Da bei schiefwinkligen Koordinaten in der Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks nur der Faktor $\sin w$ hinzutritt (§ 11, Aufg. 8), so gelten alle auf die Gleichung (1) bezüglichen Bemerkungen auch für schiefwinklige Systeme.

Durch die Gleichung (1) werden also (bei schiefwinkligen wie bei rechtwinkligen Koordinaten) alle Punkte der Geraden P_1P_2 scharf unterschieden von allen anderen Punkten der Ebene. Wir nennen sie daher die Gleichung der Geraden, indem wir definieren:

Unter der Gleichung einer Geraden versteht man eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen x und y, die allemal, aber auch nur dann, erfüllt wird, wenn x, y die Koordinaten eines Punktes der Geraden bedeuten.

Da jede Gerade durch zwei ihrer Punkte bestimmt werden kann, so hat also jede Gerade eine Gleichung. Es ist damit aber noch nicht gesagt, dafs jede Gerade nur eine Gleichung besitze. In der That könnten wir ja die Gerade ebenso gut durch zwei andere auf ihr gelegene Punkte P' und P'' mit den Koordinaten x', y' und x'', y'' bestimmen und erhielten als Gleichung derselben Geraden die Gleichung

$$x(y'-y'')-y(x'-x'')+x'y''-x''y'=0,$$

die von (1) verschieden ist. Vorläufig werden wir daher einer jeden Geraden unzählig viele Gleichungen zusprechen müssen. Wir kommen aber darauf noch zurück.

Man kann die Gleichung (1) der Geraden P_1P_2 auch ganz direkt ableiten. Aus der Figur des § 9 lesen wir nämlich unmittelbar für jeden Punkt P der Geraden P_1P_2, und nur für einen solchen, die Proportion ab:

$$QP : P_1Q = SP_2 : P_1S,$$

folglich:

$$(2) \qquad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ oder } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

woraus durch leichte Reduktion die Gleichung (1) hervorgeht.

Aufg. 1. Wie heifst die Gleichung der durch (2, — 3); (— 4, 1) gehenden Geraden? Liegt der Punkt (1, 4) oder etwa der Anfangspunkt auf der Geraden?

Aufg. 2. Wenn P_2 mit O zusammenfällt, so hat die Gerade OP_1 die Gleichung $xy_1 - yx_1 = 0$, oder $\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$. Weise dies direkt nach an Hand einer Figur. (§ 5, Aufg. 5.)

Aufg. 3. Durch passende Wahl von P_1 findet man aus Aufg. 2, dafs die Gleichungen der x-Achse, der y-Achse und der beiden Winkelhalbierenden lauten:

$$y = 0, \quad x = 0, \quad x - y = 0, \quad x + y = 0.$$

Beweise dies direkt.

Aufg. 4. Ist $x_1 = x_2 = a$, während y_1 und y_2 von einander verschieden sind, so erhält man $x = a$ als die Gleichung von P_1P_2. Ist ebenso $y_1 = y_2 = b$, $x_1 \neq x_2$, so erhält man $y = b$. Zeige dies direkt.

Aufg. 5. Ein Dreieck ist gegeben durch (2, 3); (— 4, 1); (2, — 3); wie heifsen die Gleichungen der drei Seiten?

Aufg. 6. Ein Dreieck ist gegeben durch die drei Punkte (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3). Beweise, dafs die Gleichungen der drei Mittellinien lauten:

$$x(2y_1 - y_2 - y_3) - y(2x_1 - x_2 - x_3) + x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_1 = 0,$$
$$x(2y_2 - y_3 - y_1) - y(2x_2 - x_3 - x_1) + x_2y_3 - x_3y_2 + x_2y_1 - x_1y_2 = 0,$$
$$x(2y_3 - y_1 - y_2) - y(2x_3 - x_1 - x_2) + x_3y_1 - x_1y_3 + x_3y_2 - x_2y_3 = 0.$$

Beachte den Umstand, dafs durch Addition der drei Gleichungen die linke Seite identisch verschwindet. Beachte ferner, dafs die beiden letzten Gleichungen aus der ersten durch cyklische Vertauschung der Indices hervorgehen (§ 11).

Aufg. 7. Finde für das Dreieck von Aufg. 5 die Gleichungen der Mittellinien.

Aufg. 8. Geht die Gerade (3, 4); (— 2, — 5) durch den Anfangspunkt? Liegen die Punkte (1, 5) und (— 6, — 2) auf derselben Seite jener Geraden?

Aufg. 9. Beachte, dafs die Gl. (2) auch aus Gl. (2) von § 9 durch leichte Umformung hervorgeht. Studiere insbesondere Aufg. 1 von § 9.

§ 17. Fortsetzung. Die Gerade sei bestimmt durch ihren Abstand vom Anfangspunkte und den Winkel, den dieser mit der x-Achse bildet.

Da man eine und dieselbe Gerade auf die verschiedensten Arten bestimmen kann, so wird man auch die verschiedensten Gleichungen für dieselbe Gerade erwarten. Sei z. B. in einem beliebigen Koordinatensysteme eine Gerade, wie in § 14, durch ihren Abstand δ vom Anfangspunkte und den Winkel α bestimmt, den δ mit der positiven Richtung der x-Achse einschliefst. Dann war der Abstand d eines beliebigen Punktes (x, y) von der Geraden (α, δ) gegeben durch

$$d = -(x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta),$$

insofern $\beta = w - \alpha$ den Winkel bedeutet, den δ mit der positiven y-Achse einschliefst. Dieser Ausdruck für d ist positiv für alle Punkte, die auf derselben Seite der Geraden liegen wie der Anfangspunkt, negativ für alle Punkte auf der entgegengesetzten Seite und er verschwindet seiner geometrischen Bedeutung entsprechend allemal, aber auch nur dann, wenn der Punkt (x, y) auf der Geraden (α, δ) liegt. Die Gleichung

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta = 0 \tag{1}$$

ist daher die Gleichung der Geraden (α, δ).

Bedeuten x, y die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden, so wird die Gleichung erfüllt; bedeuten x, y dagegen die Koordinaten eines Punktes, der nicht auf der Geraden liegt, so ist die linke Seite nicht gleich Null, sondern bedeutet den mit dem entgegengesetzten Zeichen versehenen Abstand des Punktes (x, y) von der Geraden (α, δ).

Für rechtwinklige Koordinaten lautet die Gleichung der Geraden (α, δ):

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0. \tag{2}$$

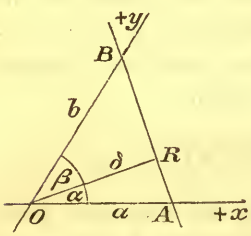
Aufg. 1. In einem rechtwinkligen Systeme sei eine Gerade durch $\delta = 7$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ gegeben. Wie heifst ihre Gleichung? Liegt der Punkt $(-1, 8)$ auf der Geraden?

Aufg. 2. In welchen Punkten trifft die vorhergehende Gerade die Achsen und ihre Winkelhalbierenden?

§ 18. Fortsetzung. Die Gerade sei gegeben durch ihre Achsenabschnitte.

Bezeichnet man die Abschnitte OA und OB, die eine Gerade mit den beliebig gewählten Koordinatenachsen bildet, mit a und b, und haben α, β, δ die frühere Bedeutung, so lehrt die Figur unmittelbar, dafs

Fig. 16.



$$\cos \alpha = \frac{\delta}{a}, \quad \cos \beta = \frac{\delta}{b}$$

ist. Führt man diese Werte in die Gleichung der Geraden

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta = 0 \tag{1}$$

ein und dividiert mit δ, so kommt:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0. \tag{2}$$

Da die linke Seite von (2) sich von der linken Seite von (1) nur durch den von Null verschiedenen Faktor δ unterscheidet, so genügt jedes Wertepaar, das der Gleichung (1) genügt, auch der Gleichung (2), und umgekehrt. Die Gleichung (2) ist daher als die Gleichung der durch ihre Achsenabschnitte a und b bestimmten Geraden zu bezeichnen.

Aufg. 1. Welche Form nimmt die Gleichung der Geraden an, wenn einer der Achsenabschnitte unendlich grofs wird, d. h. wenn die Gerade einer der Achsen parallel ist?

Aufg. 2. Wie heifsen die Gleichungen der vier Geraden mit den Achsenabschnitten a, a; $-a, a$; $-a, -a$; $a, -a$?

Aufg. 3. Wie heifst die Gleichung der Geraden mit den Achsenabschnitten -7 und 3?

Aufg. 4. Wähle auf der Geraden AB einen beliebigen Punkt P mit der Abscisse $OM = x$. Leite die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

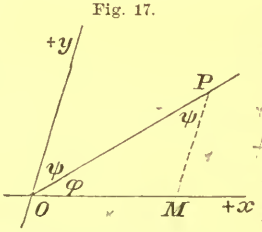
direkt aus der Proportion $OA : OB = MA : MP$ ab.

Aufg. 5. Leite dieselbe Gleichung auch ab als Spezialfall von Gl. (1) in § 16 (s. § 11, Aufg. 7).

§ 19. Fortsetzung. Die Gerade sei gegeben durch einen Punkt und den Winkel, den sie mit der positiven Richtung der x-Achse bildet. Richtungskoeffizient.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dafs der gegebene Punkt der Anfangspunkt sei. Die Gerade bilde mit der positiven Richtung der x-Achse den Winkel φ (§ 8) und demnach mit der positiven Richtung der y-Achse den Winkel $w - \varphi = \psi$. Aus der Figur folgt dann für jeden Punkt P der Geraden, aber auch nur für einen solchen, die Gleichung:

Fig. 17.



$$\frac{MP}{OM} = \frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\varphi}{\sin(w-\varphi)}.$$

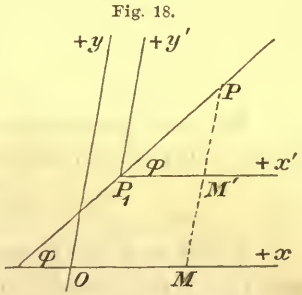
Setzen wir $\frac{\sin\varphi}{\sin(w-\varphi)} = \mu$, so ist

$$y = \mu x \tag{1}$$

die Gleichung der durch O und den Winkel φ bestimmten Geraden.

Um nun die Gleichung der durch einen beliebigen Punkt P_1 gehenden Geraden, die mit der positiven Richtung der x-Achse den Winkel φ einschliefst, zu finden, legen wir durch P_1, mit den Koordinaten x_1, y_1, ein neues Koordinatensystem parallel und gleichgerichtet mit dem alten.

Fig. 18.



Ein beliebiger Punkt P der gegebenen Geraden, dessen alte Koordinaten x, y sind, hat dann die neuen Koordinaten $x' = x - x_1$, $y' = y - y_1$, und für diese besteht, da w und φ in dem neuen Systeme dieselben sind wie in dem

alten, die Gleichung $y' = \mu x'$. Daraus folgt aber, indem man zu dem alten Systeme zurückkehrt:

$$y - y_1 = \mu (x - x_1). \tag{2}$$

Dieses ist daher die gesuchte Gleichung der durch P_1 und φ definierten Geraden.

Liegt insbesondere P_1 auf der Ordinatenachse, so ist $x_1 = 0$ und y_1 gleich dem Abschnitte, den die Gerade mit der Ordinatenachse bestimmt. Bezeichnet man diesen, wie früher, mit b, so ist

$$y = \mu x + b \tag{3}$$

die Gleichung der durch ihren Abschnitt auf der Ordinatenachse und ihre Richtung bestimmten Geraden.

Man bezeichnet den in den drei Gleichungen (1), (2) und (3) als Faktor von x auftretenden Koeffizienten, nämlich

$$\mu = \frac{\sin \varphi}{\sin (w - \varphi)}, \tag{4}$$

als den Richtungskoeffizienten der betreffenden Geraden. In demselben Koordinatensysteme haben dann parallele Geraden gleiche Richtungskoeffizienten.

Für eine durch zwei Punkte P_1 und P_2 bestimmte Gerade (man denke in Fig. 18 P durch P_2 ersetzt) erhält man aus (4) den Richtungskoeffizienten unmittelbar in der Form:

$$\mu = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{5}$$

d. h.: der Richtungskoeffizient einer durch zwei Punkte gegebenen Geraden ist gleich dem Quotienten aus der Ordinatendifferenz und der Abscissendifferenz der beiden Punkte.

Aus den Gleichungen (2) und (5) findet man dann wieder die in § 16, Gl. (2) abgeleitete Gleichungsform:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1). \tag{6}$$

Wählt man für P_1 und P_2 speziell die Schnittpunkte $(a, 0)$ und $(0, b)$ der Geraden mit den Koordinatenachsen, so folgt aus (5):

$$\mu = -\frac{b}{a}, \text{ d. h.:} \tag{7}$$

Der Richtungskoeffizient einer Geraden ist gleich dem negativen Verhältnisse ihrer Achsenabschnitte.

Ist das Koordinatensystem ein rechtwinkliges, so folgt aus $\sin(w - \varphi) = \sin(90^0 - \varphi) = \cos\varphi$, daſs

$$\mu = \operatorname{tg}\varphi \tag{8}$$

ist, d. h.:

Im rechtwinkligen Koordinatensysteme ist der Richtungskoeffizient einer Geraden gleich der Tangente ihres Neigungswinkels.

Aufg. 1. Beweise, daſs nicht nur jede Gerade einen ganz bestimmten Richtungskoeffizienten besitzt, sondern daſs auch umgekehrt jede Zahl als Richtungskoeffizient einer ganz bestimmten, durch P_1 gehenden Geraden aufgefaſst werden kann. Durch Auflösen der Gleichung (4) erhält man nämlich

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mu \sin w}{1 + \mu \cos w},$$

also zu jedem μ einen eindeutig bestimmten Wert von $\operatorname{tg}\varphi$. Geraden mit demselben Richtungskoeffizienten müssen daher parallel sein oder zusammenfallen.

Aufg. 2. Zeige, daſs in jedem beliebigen Koordinatensysteme den Werten $\mu = 0, \infty, +1, -1$ Parallelen zu den beiden Achsen und ihren Winkelhalbierenden entsprechen.

Aufg. 3. Bestimme in einem beliebigen Koordinatensysteme die Gleichungen der durch $(2, -5)$ gehenden Geraden, die den Achsen und ihren Winkelhalbierenden parallel sind.

Aufg. 4. Zeige, daſs der durch Gl. (5) dargestellte Wert von μ für eine und dieselbe Gerade unabhängig ist von der Wahl der Punkte P_1 und P_2.

Aufg. 5. Ein Dreieck ist durch $(-2, -5)$; $(3, -4)$; $(-1, 2)$ gegeben. Bestimme die Richtungskoeffizienten der drei Seiten sowie die Gleichungen der drei Geraden, die durch die Ecken des Dreiecks gehen und den gegenüberliegenden Seiten parallel sind.

Aufg. 6. Bestimme die Gleichungen der drei Geraden, die durch den Anfangspunkt gehen und den Mittellinien des vorhergehenden Dreiecks parallel sind.

§ 20. Jede Gerade besitzt eine Gleichung von der Form $Ax+By+C=0$, und umgekehrt, jede Gleichung dieser Form stellt eine Gerade dar.

Je nach der Bestimmungsart konnten wir für eine und dieselbe Gerade, unter Voraussetzung eines beliebigen Koordinatensystemes, die folgenden Gleichungen ableiten:

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0,$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

$$x \cos\alpha + y \cos\beta - \delta = 0,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$y - y_1 = \mu(x - x_1),$$

$$y = \mu x + b.$$

So verschieden nun auch diese Gleichungen (deren Anzahl man noch beliebig vergrößern könnte, da sich dieselbe Gerade auf unzählig viele Arten bestimmen läßt) auf den ersten Blick erscheinen mögen, sie haben doch alle das Gemeinschaftliche, daß jede von ihnen die Größen x und y in der ersten Potenz, behaftet mit bekannten Koeffizienten, enthält und außerdem noch ein von x und y freies Glied.

Jede der Gleichungen ist also von der Form

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

wo A, B und C durch die Bestimmungsart der Geraden gegebene, also bekannte Größen bedeuten, während x und y keine festen Werte haben, sondern in dem Sinne veränderlich sind, daß sie die Koordinaten eines jeden Punktes der Geraden bedeuten können. Man nennt aus diesem Grunde x und y auch die laufenden Koordinaten.

Die verschiedenen Gleichungen, die wir für eine und dieselbe Gerade erhalten, unterscheiden sich also nur durch die Werte der Koeffizienten A, B, C von einander, die man im Gegensatze zu den Veränderlichen x, y auch die Konstanten der betreffenden Gleichung nennt. Es drängen sich nun sofort zwei fundamentale Fragen auf:

I. Wenn jetzt durch die verschiedensten Beispiele gezeigt ist, dafs jede gerade Linie eine Gleichung von der Form $Ax + By + C = 0$ besitzt, kann dann auch umgekehrt jede Gleichung von dieser Form als die Gleichung einer Geraden aufgefafst werden?

II. Wenn man für eine und dieselbe Gerade das eine Mal die Gleichung $Ax + By + C = 0$, das andere Mal $A'x + B'y + C' = 0$ findet, welche Beziehung besteht dann zwischen A, B, C einerseits und A', B', C' andererseits?

Um die erste Frage zu beantworten, nehmen wir also an, es seien in der Gleichung (1) die Koeffizienten A, B, C ganz beliebig gegebene Gröfsen, die positiv, negativ, oder (zum Teil) auch gleich Null sein können. Repräsentieren wir dann, unter Voraussetzung eines beliebigen Systemes von Parallelkoordinaten, jedes Wertepaar x, y, das der Gleichung (1) genügt, durch einen Punkt, so haben wir zu beweisen, dafs alle diese Punkte eine Gerade erfüllen.

Zur Bestimmung aller dieser Wertepaare lösen wir am zweckmäfsigsten die Gleichung (1) nach einer der beiden Variabeln, etwa nach y, auf. Diese Auflösung erfordert, dafs B von Null verschieden sei. Erledigen wir daher zunächst den Spezialfall $B = 0$. In diesem Falle liefert die Gleichung

$$Ax + C = 0 \tag{2}$$

zu jedem y stets denselben Wert $x = -\frac{C}{A}$. Die entsprechenden Punkte liegen daher alle auf der zur y-Achse parallelen Geraden, die auf der x-Achse das Stück $-\frac{C}{A}$ abschneidet. Umgekehrt genügen die Koordinaten jedes Punktes dieser Geraden der Gleichung $Ax + C = 0$.

Ist dagegen B von Null verschieden, so erhalten wir durch Auflösen der Gleichung (1) nach y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \tag{3}$$

Jedes Wertepaar x, y, das der Gleichung (1) genügt, befriedigt auch die Gleichung (3), und umgekehrt.

Wir konstruieren jetzt eine Gerade, deren Richtungskoeffizient $\mu = -\frac{A}{B}$ ist (§ 19, Aufg. 1) und die auf der y-Achse das Stück $b = -\frac{C}{B}$ abschneidet. Diese Gerade besitzt dann aber eine Gleichung, nämlich:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad (\S\ 19,\ \text{Gl. (3)}).$$

Da diese mit (3) völlig identische Gleichung allemal, aber auch nur dann, erfüllt wird, wenn x, y die Koordinaten eines Punktes jener Geraden bedeuten, und da dasselbe folglich auch von Gleichung (1) gilt, so ist damit jetzt allgemein bewiesen, dafs für jedes beliebige Koordinatensystem jede Gleichung von der Form $Ax+By+C=0$ als die Gleichung einer Geraden aufgefafst werden kann.

Wir werden in der Folge eine Gerade oft kurz durch ihre Gleichung benennen und von der Geraden $Ax + By + C = 0$ reden.

Zur Beantwortung der zweiten Frage nehmen wir an, die beiden Gleichungen $Ax+By+C=0$ und $A'x+B'y+C'=0$ stellten dieselbe gerade Linie dar. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

1) $B = 0$. Dann stellt die erste Gleichung eine Parallele zur Ordinatenachse dar, und es mufs daher auch, da die zweite Gleichung dieselbe Parallele darstellen soll, $B' = 0$ sein, weil man sonst nicht für jedes y dasselbe x erhalten würde. Aus Gleichung (2) folgt jetzt aber $-\frac{C}{A} = -\frac{C'}{A'}$ oder $\frac{A'}{A} = \frac{C'}{C}$. Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Wert dieser beiden Brüche mit λ, so erhält man:

$$A' = \lambda A, \quad C' = \lambda C. \tag{4}$$

2) B und folglich auch B' seien von Null verschieden. Zu jedem x mufs sich dann aus beiden Gleichungen dasselbe y ergeben, d. h. es mufs für jedes x sein:

$$-\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = -\frac{A'}{B'}x - \frac{C'}{B'}.$$

Für $x = 0$ folgt hieraus $\frac{C}{B} = \frac{C'}{B'}$, daher mufs auch für jedes x die Gleichung $\frac{A}{B}x = \frac{A'}{B'}x$ bestehen, d. h. es mufs $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$

sein. Hieraus und aus $\frac{C}{B} = \frac{C'}{B'}$ folgt aber $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$. Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Wert dieser Brüche wieder mit λ, so ergiebt sich:

$$A' = \lambda A, \quad B' = \lambda B, \quad C' = \lambda C. \tag{5}$$

In beiden Fällen finden wir also:

Wenn die beiden Gleichungen $Ax + By + C = 0$ und $A'x + B'y + C' = 0$ dieselbe Gerade darstellen sollen, so mufs die eine aus der andern durch Multiplikation mit einem konstanten, von Null verschiedenen Faktor hervorgehen.

Umgekehrt ist klar, dafs, wenn man die Gleichung einer Geraden mit einem konstanten, von Null verschiedenen Faktor multipliziert, die neue Gleichung dieselbe Gerade darstellt wie die alte.

Aufg. 1. Liegen die Punkte $(2, -3)$; $(-1, -4)$; $(-2, 7)$; $(12, 2)$ auf der Geraden $x - 5y = 2$?

Aufg. 2. Welche von den Geraden $8x - 5y + 1 = 0$, $y = -7x + 2$, $3x - 5y - 6 = 0$ geht durch den Punkt $(\frac{1}{2}, -\frac{9}{10})$?

Aufg. 3. Welche von den Geraden $5x + 3y + 1 = 0$, $2x + 3y = 0$, $4x - 5y + 2 = 0$ geht durch den Anfangspunkt?

Aufg. 4. Wie heifst die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs der Punkt (x_1, y_1) auf der Geraden $Ax + By + C = 0$ liegt?

Aufg. 5. Wenn (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf der Geraden $Ax + By + C = 0$ liegen, so liegt auch der Punkt

$$\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)$$

für jedes beliebige λ auf der Geraden. Beweise dies zunächst durch wirkliches Ausrechnen und gieb dann den inneren Grund an.

Aufg. 6. Es seien zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) und eine beliebige Gerade $Ax + By + C = 0$ gegeben. Man bestimme das Teilverhältnis λ und die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden mit der Verbindungslinie der beiden Punkte. Man findet $\lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}$.

Aufg. 7. Transformiere die Gleichung der Verbindungslinie P_1P_2 auf ein neues System, dessen Anfangspunkt die Mitte von P_1P_2 ist und dessen Achsen den alten parallel sind.

Aufg. 8. In einem rechtwinkligen Systeme seien die Geraden $5x - 2y = 7$ und $x + y = 1$ gegeben. Wie lauten die Gleichungen dieser Geraden in dem schiefwinkligen Systeme, dessen Anfangspunkt der ursprüngliche ist und dessen Achsen durch $\alpha = 0$, $\beta = 45^0$ (§ 15) bestimmt sind?

§ 21. Ableitung der speziellen Formen der Gleichung einer Geraden aus der allgemeinen Form $Ax + By + C = 0$.

Aus der am Ende des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung folgt, dafs die allgemeine Gleichung

$$Ax + By + C = 0$$

nur scheinbar drei willkürliche Konstanten enthält; denn da die Bedeutung jener Gleichung durch Multiplikation mit einer beliebigen Konstanten, etwa $\frac{1}{C}$, nicht geändert wird, so ist die durch $Ax + By + C = 0$, oder $\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = 0$ dargestellte Gerade schon vollständig bestimmt, wenn man nur die Verhältnisse $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ kennt. Die Gleichung einer Geraden enthält also im Grunde genommen nur zwei willkürliche Konstanten, die allemal so gewählt werden können, dafs die Gerade zwei Bedingungen erfüllt. Die speziellen Formen der Gleichung einer Geraden, wie

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$y = \mu x + b,$$

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - \delta = 0,$$

bringen dies auch deutlich zum Ausdrucke.

Es mufs nun nach dem Vorhergehenden möglich sein, jede dieser speziellen Formen durch einfache Multiplikation mit einem konstanten Faktor aus der allgemeinen Form abzuleiten.

Bezeichnet man z. B. die Achsenabschnitte der Geraden $Ax + By + C = 0$ mit a und b, so wird dieselbe Gerade

auch durch die Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ dargestellt, und man erkennt, dafs die erste Gleichung mit der zweiten durch Multiplikation mit $-\frac{1}{C}$ in Übereinstimmung gebracht werden kann. Vergleicht man aber jetzt $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0$ mit $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$, so ergeben sich für die Achsenabschnitte a und b der Geraden $Ax + By + C = 0$ die Werte:

$$(1) \qquad a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Natürlich erhält man dasselbe Resultat, wenn man bedenkt, dafs die Schnittpunkte der Geraden $Ax + By + C = 0$ mit den Achsen durch die Koordinaten a, 0 und 0, b ausgezeichnet sind. Man setze daher das eine Mal $y = 0$ und löse nach x auf, wodurch sich $x = a = -\frac{C}{A}$ ergiebt, das andere Mal $x = 0$ und löse nach y auf, was zu $y = b = -\frac{C}{B}$ führt.

Man beachte, dafs die Gerade $Ax + By + C = 0$ allemal, aber auch nur dann, durch den Anfangspunkt geht, wenn das absolute Glied $C = 0$ ist.

Will man ferner den Richtungskoeffizienten μ und den Achsenabschnitt b der Geraden $Ax + By + C = 0$ bestimmen, so hat man (§ 20) nur durch B zu dividieren, d. h. nach y aufzulösen. Die Gleichung

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

zeigt dann, dafs

$$(2) \qquad \mu = -\frac{A}{B} \quad \text{und} \quad b = -\frac{C}{B}$$

ist. Der Richtungskoeffizient μ ist also allein von dem Verhältnisse der Koeffizienten A und B abhängig, nicht aber von dem absoluten Gliede C. Daraus folgt, dafs Gleichungen, bei denen die Koeffizienten von x und y einander proportional sind, wie etwa $4x - 10y - 1 = 0$ und $2x - 5y - 3 = 0$, stets parallele Geraden darstellen (§ 19, Aufg. 1).

Aufg. 1. Bestimme die Achsenabschnitte und die Richtungskoeffizienten der Geraden $2x + 7y + 5 = 0$, $3x + 4y = 6$,

$-5x+2y=7$, $5x-8y-2=0$ und bestätige jedesmal den Zusammenhang $\mu=-\frac{b}{a}$ (§ 19, Gl. 7).

Aufg. 2. Bestimme die Achsenabschnitte der beiden Geraden $5x-8y+9=0$ und $56y-35x=63$ und diskutiere das Resultat.

Aufg. 3. Bestimme die Richtungskoeffizienten der Geraden $5x-7y=0$, $3x+8=0$, $2y-7=0$.

Aufg. 4. Bestimme μ und b so, daſs die Gerade $y=\mu x+b$ durch die beiden Punkte (x_1, y_1); (x_2, y_2) hindurchgeht, und konstatiere die Übereinstimmung des Resultats mit § 19, Gl. (6).

Aufg. 5. Bestimme den Richtungskoeffizienten der Geraden $x\cos\alpha+y\sin\alpha-\delta=0$ und leite das Resultat auch geometrisch ab.

Aufg. 6. Wenn man in der Gleichung $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\lambda$ die Zahl λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen läſst, erhält man die Gleichungen unendlich vieler Geraden. Welche Lage haben diese zu einander? Beachte insbesondere die Werte $\lambda=0$, $+1$, -1, ∞.

Aufg. 7. Welches sind die Achsenabschnitte der Geraden

$$x(y_1-y_2)-y(x_1-x_2)+x_1y_2-x_2y_1=0?$$

Aufg. 8. Ein Punkt x der x-Achse werde von einem beliebigen Punkte (x_0, y_0) aus auf die y-Achse projiziert. Man findet als Ordinate der Projektion $y=\frac{y_0x}{x-x_0}$. Daraus folgt aber mit Rücksicht auf § 4, Aufg. 5, daſs, wenn man vier Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 der x-Achse von (x_0, y_0) aus auf die y-Achse projiziert, das Doppelverhältnis der Projektionen gleich dem der Originale ist. Da aber je zwei beliebige Geraden zu Koordinatenachsen gewählt werden können, so ergiebt sich der Satz: Das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden wird nicht zerstört, wenn man sie von einem beliebigen Centrum aus auf eine beliebige Gerade projiziert.

§ 22. Fortsetzung. Die Normalform.

Unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Koordinatensystemes soll die Gleichung $Ax+By+C=0$ einer Geraden auf die Form $x\cos\alpha+y\sin\alpha-\delta=0$ gebracht werden,

d. h. man soll den Abstand δ des Anfangspunktes von der Geraden $Ax+By+C=0$ und den Winkel α bestimmen, den dieser Abstand mit der positiven Richtung der x-Achse bildet.

Nach § 20 muſs es einen Faktor λ geben, sodaſs

$$\lambda A = \cos\alpha, \quad \lambda B = \sin\alpha, \quad \lambda C = -\delta \text{ ist.}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt durch Quadrieren und Addieren $\lambda^2(A^2+B^2)=1$, oder $\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Nach der dritten Gleichung soll λC negativ sein, also hat man überdies der Quadratwurzel das entgegengesetzte Zeichen von C zu geben. Dann ist also jetzt:

$$(1)\quad \cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \delta = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Unter allen Formen, in denen sich die Gleichung einer Geraden darstellen läſst, spielt die Form

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta = 0$$

wegen der geometrischen Bedeutung der linken Seite eine besondere Rolle. Wir erinnern uns, daſs diese linke Seite allemal den mit dem entgegengesetzten Zeichen genommenen Abstand des Punktes (x, y) von der Geraden (α, δ) darstellt; diese Eigenschaft hatte uns ja gerade zur Einführung des Begriffes der Gleichung einer Geraden gedient. Man hat daher diese spezielle Gleichungsform $x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta = 0$ durch einen besonderen Namen ausgezeichnet und sie die Normalform genannt. Will man die Gleichung $Ax+By+C=0$ einer Geraden auf die Normalform bringen, so hat man sie nach dem Obigen durch $\sqrt{A^2+B^2}$ zu dividieren, wo der Quadratwurzel das entgegengesetzte Zeichen von C zu geben ist. In der Gleichung

$$(2)\qquad \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0,$$

die nunmehr mit $x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta = 0$ völlig identisch ist, stellt dann die linke Seite ebenfalls den mit dem entgegengesetzten Zeichen genommenen Abstand d des Punktes (x, y) von der Geraden $Ax+By+C=0$ dar, d. h. es ist:

$$(3)\qquad Ax+By+C = -d\sqrt{A^2+B^2}.$$

Dadurch gewinnen wir aber eine neue Einsicht in die Bedeutung der allgemeinen Gleichung $Ax + By + C = 0$ einer Geraden. Es stellt nämlich der Ausdruck auf der linken Seite, also $Ax + By + C$, den mit $-\sqrt{A^2 + B^2}$ multiplizierten Abstand des Punktes (x, y) von der durch die Achsenabschnitte $-\frac{C}{A}$ und $-\frac{C}{B}$ oder (für $C = 0$) durch den Richtungskoeffizienten $-\frac{A}{B}$ bestimmten Geraden dar. Dieser Ausdruck $Ax + By + C$ ist daher positiv für alle Punkte auf der einen Seite der Geraden, negativ für alle Punkte auf der andern Seite und er verschwindet allemal, aber auch nur dann, wenn der Punkt (x, y) auf der Geraden selbst liegt. In dieser Weise tritt die eigentliche Bedeutung der Gleichung $Ax + By + C = 0$ einer Geraden scharf hervor. Zugleich ist durch das Vorhergehende die folgende Aufgabe erledigt:

Es soll der Abstand eines Punktes (x_0, y_0) von der Geraden $Ax + By + C = 0$ nach Gröfse und Vorzeichen angegeben werden.

Der gesuchte Abstand ist nämlich

$$d = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \tag{4}$$

wo nach dem Obigen der Quadratwurzel das entgegengesetzte Zeichen von C zu geben ist.

Aufg. 1. Bringe die Gleichungen $3x - 4y + 7 = 0$, $5x + 12y - 1 = 0$, $8x + 3y + 1 = 0$ auf die Normalform und bestimme daraus die Lage der Geraden.

Aufg. 2. Bestimme für die Geraden

$$2x + 7y = 1,\quad 5y - 3x = 4,\quad 3 + 4x + 3y = 0,\quad 2x - 5y - 1 = 0$$

jedesmal den Quadranten, in dem sich das entsprechende α befindet.

Aufg. 3. Wie weit ist die Gerade $12x - 5y + 4 = 0$ vom Anfangspunkte entfernt?

Aufg. 4. Bestimme die Abstände der Punkte

$$(-1, 5);\ (2, -7);\ (0, 1);\ (1, 0);\ (0, 0);\ (0, \tfrac{5}{16})$$

von der Geraden $63x - 16y + 5 = 0$ und diskutiere die Vorzeichen.

Aufg. 5. Welches ist die geometrische Bedeutung der Ausdrücke

$$16x_0 + 63y_0 - 2, \quad 3x_0 + 8y_0 - 5, \quad x_0 - y_0, \quad x_0 + y_0,$$

wenn x_0, y_0 die Koordinaten eines gegebenen Punktes sind?

Aufg. 6. Bestimme den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ aus den Koordinaten seiner Ecken durch Multiplikation der Seite P_1P_2 mit dem von P_3 auf sie gefällten Lote. Konstatiere die Übereinstimmung des Resultates mit § 11.

Aufg. 7. Drücke die Bedingung dafür aus, dafs der Punkt (x_0y_0) von den beiden Geraden $Ax + By + C = 0$ und $A'x + B'y + C' = 0$ gleiche Abstände hat. Wo liegen alle diese Punkte, und wie kann man demnach das Resultat deuten?

Aufg. 8. Interpretiere im Hinblick auf Gl. (4) das Resultat der Aufg. 6 des § 20. Diskutiere insbesondere die Vorzeichen.

§ 23. Die Koordinaten des Durchschnittspunktes zweier Geraden aus ihren Gleichungen zu bestimmen.

Die beiden Geraden seien durch die Gleichungen

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{1}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{2}$$

gegeben.

Die Koordinaten x, y des Schnittpunktes S müssen dann den beiden Gleichungen gleichzeitig genügen; man findet sie daher, indem man (1) und (2) als Gleichungen mit den beiden Unbekannten x und y betrachtet und nach diesen auflöst.

Man erhält:

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}. \tag{3}$$

Diese Formeln liefern für die Koordinaten des Schnittpunktes ganz bestimmte endliche Werte, vorausgesetzt, dafs

$$A_1B_2 - A_2B_1$$

von Null verschieden ist. Ist aber $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, während die Zähler von x und y nicht verschwinden, so werden x und y unendlich grofs, der Schnittpunkt S liegt im Unendlichen, d. h. die beiden Geraden sind parallel. In der That folgt

aus $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, dafs $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$ ist, d. h. dafs die Richtungskoeffizienten gleich sind.

Aufg. 1. Die Seiten eines Dreiecks haben die Gleichungen

$$x - 5y = 1, \quad 2x + 3y = 4, \quad 5x - 3y + 2 = 0.$$

Bestimme die Koordinaten der Ecken.

Aufg. 2. Diskutiere die Formeln für die Koordinaten des Schnittpunktes, falls von den Ausdrücken

$$A_1B_2 - A_2B_1, \quad B_1C_2 - B_2C_1, \quad C_1A_2 - C_2A_1$$

einer, zwei oder alle drei verschwinden. Zeige, dafs, wenn zwei der Ausdrücke verschwinden, der dritte im allgemeinen auch verschwindet und dafs dann die beiden Geraden zusammenfallen.

Aufg. 3. Diskutiere dieselben Formeln für den Fall, dafs von den Koeffizienten A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 einer oder mehrere, z. B. A_1 und A_2, oder A_1 und B_2, verschwinden. Unter welchen Bedingungen können von jenen drei Ausdrücken zwei verschwinden, ohne dafs der dritte auch verschwindet?

Aufg. 4. Geht die Gerade $x - 3y - 7 = 0$ durch den Schnittpunkt von $2y - 3x = 8$ und $4x - 7y = 1$?

Aufg. 5. Bestimme den Schnittpunkt der Geraden

$$6x - 7y + 5 = 0, \quad 56y = 40 + 48x$$

und diskutiere das Resultat.

Aufg. 6. Beweise, dafs der doppelte Inhalt des durch die Geraden

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

gebildeten Dreiecks durch die Formel

$$\frac{[A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1)]^2}{(A_2B_3 - A_3B_2)(A_3B_1 - A_1B_3)(A_1B_2 - A_2B_1)}$$

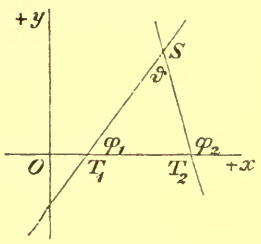
gegeben wird.

Aufg. 7. Bestimme aus den Koordinaten der Ecken des Dreiecks $P_1P_2P_3$ die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Mittellinien (§ 9, Aufg. 3 und 4).

§ 24. Den Winkel zweier Geraden aus ihren Gleichungen zu bestimmen, unter Voraussetzung rechtwinkliger Koordinaten.

Bezeichnet man die ganz bestimmten Winkel, die die Geraden $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ und $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ mit der positiven Richtung der x-Achse bilden, mit φ_1 und φ_2, so ist einer der beiden Winkel, die die Geraden miteinander bilden, allemal $\varphi_2 - \varphi_1$ oder $\varphi_1 - \varphi_2$, je nachdem φ_2 gröfser oder kleiner als φ_1 ist; seine Tangente ist daher entweder $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$ oder $\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = -\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Fig. 19.



Da aber die Tangente des Nebenwinkels (wegen $\operatorname{tg}(180^0 - \vartheta) = -\operatorname{tg}\vartheta$) alsdann gleich $\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)$ oder gleich $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$ ist, so folgt, dafs unter allen Umständen $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$ gleich der Tangente eines der beiden Winkel ist, die die Geraden mit einander bilden. Nun ist

$$(1) \qquad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_1}.$$

Da das Koordinatensystem ein rechtwinkliges ist, so sind $\operatorname{tg}\varphi_1$ und $\operatorname{tg}\varphi_2$ die Richtungskoeffizienten der beiden Geraden (§ 19, Gl. (8)), also gleich $-\frac{A_1}{B_1}$ und $-\frac{A_2}{B_2}$. Setzt man diese Werte in $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$ ein, so erhält man nach einfacher Reduktion:

$$(2) \qquad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Von besonderem Interesse sind die beiden Fälle, für die $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$ verschwindet oder unendlich grofs wird. Dann sind die beiden Geraden einander parallel oder zu einander normal; und umgekehrt, wenn dies stattfindet, mufs $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$ verschwinden oder unendlich grofs werden. Daraus folgt:

I. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Geraden $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ und $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ einander parallel sind, lautet:

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0.$$

II. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Geraden $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ und $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ auf einander senkrecht stehen, heifst:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Sind die beiden Geraden durch die Gleichungen $y = \mu_1 x + b_1$ und $y = \mu_2 x + b_2$ gegeben, so findet man:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + \mu_1\mu_2}.$$

Die Bedingungen I und II lauten dann einfacher:

$$\mu_1 = \mu_2 \text{ und } 1 + \mu_1\mu_2 = 0 \text{ oder } \mu_2 = -\frac{1}{\mu_1}.$$

Zu beachten ist, dafs die Gleichung $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ oder $\mu_1 = \mu_2$ auch für schiefwinklige Koordinaten die Bedingung des Parallelismus ausdrückt (§ 23), während die Bedingung $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ oder $1 + \mu_1\mu_2 = 0$ den rechtwinkligen Koordinaten ausschliefslich zukommt.

Mit Berücksichtigung von § 19 können wir nun sofort folgende Fundamentalaufgaben lösen:

1) Die Gleichung der Geraden zu bestimmen, die durch den Punkt (x_1, y_1) geht und der Geraden $y = \mu x + b$ parallel ist.

Da die Parallele ebenfalls den Richtungskoeffizienten μ besitzt, so lautet ihre Gleichung:

$$y - y_1 = \mu(x - x_1).$$

Diese Lösung gilt für schiefwinklige wie für rechtwinklige Koordinaten.

2) Für ein rechtwinkliges Koordinatensystem die Gleichung der Geraden zu bestimmen, die durch den Punkt (x_1, y_1) geht und auf der Geraden $y = \mu x + b$ senkrecht steht.

Da der Richtungskoeffizient der gesuchten Normalen gleich $-\frac{1}{\mu}$ sein mufs, so lautet ihre Gleichung:

$$y - y_1 = -\frac{1}{\mu}(x - x_1).$$

Ist die gegebene Gerade durch die Gleichung $Ax + By + C = 0$

dargestellt $\left(\text{also } \mu = -\frac{A}{B}\right)$, so ergeben sich für die Parallele und die Normale die Gleichungen:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0,$$
$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0,$$

von denen die erste für beliebige, die zweite aber nur für rechtwinklige Koordinaten gilt. Die Gleichung der Normalen kann man auch in der Form $\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B}$ schreiben.

Es ist von praktischem Werte, sich zu merken, dafs die Gleichung irgend einer Parallelen oder (bei rechtwinkligen Koordinaten) irgend einer Normalen der Geraden

$$Ax + By + C = 0$$

sich allemal in der Form

$$Ax + By + C' = 0,$$

oder

$$Bx - Ay + C'' = 0$$

darstellen läfst. C' und C'' sind dann noch unbekannte Konstanten, die dadurch bestimmt werden können, dafs man die Parallele oder die Normale noch einer weiteren Bedingung unterwirft, z. B. durch einen festen Punkt zu gehen. Oft aber ist die Bestimmung von C' und C'' gar nicht gefordert, und dann hat man in den angegebenen Gleichungen sofort die fertigen Lösungen.

Bei den folgenden Aufgaben sollen, wenn nichts anderes bemerkt wird, rechtwinklige Koordinaten vorausgesetzt werden.

Aufg. 1. Man zeige direkt, dafs für zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden $\mu_1 = -\frac{1}{\mu_2}$ ist.

Aufg. 2. Bestimme die Winkel des Dreiecks (2, 5); (— 1, 4); (3, 2).

Aufg. 3. Bestimme die Gleichung der Geraden, die durch den Anfangspunkt geht und zu $2x - 7y + 11 = 0$ parallel ist.

Aufg. 4. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks seien $2x + 7y - 3 = 0$, $y - 5x + 1 = 0$, $3x - 4y + 2 = 0$. Wie heifsen die Gleichungen der drei Geraden, die durch

die Ecken des Dreicks gehen und den Gegenseiten parallel sind?

Aufg. 5. Bestimme die Gleichungen der drei Höhen des Dreiecks $(1, 2)$; $(3, -4)$; $(-2, -5)$ und die Koordinaten des Schnittpunktes von je zweien.

Aufg. 6. Bestimme für dasselbe Dreieck die Gleichungen der Senkrechten in den Mitten der Seiten und die Koordinaten des Schnittpunktes von je zweien.

Aufg. 7. Beweise, dafs die Gleichungen der drei Höhen des Dreiecks (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) lauten:

$$(x - x_1)(x_2 - x_3) + (y - y_1)(y_2 - y_3) = 0,$$
$$(x - x_2)(x_3 - x_1) + (y - y_2)(y_3 - y_1) = 0,$$
$$(x - x_3)(x_1 - x_2) + (y - y_3)(y_1 - y_2) = 0.$$

Beachte die cyklische Vertauschung sowie den Umstand, dafs durch Addition der drei Gleichungen die linke Seite identisch verschwindet.

Aufg. 8. Beweise, dafs die Gleichungen der drei Senkrechten, die man in den Mitten der Seiten eines Dreiecks errichten kann, lauten:

$$x(x_2 - x_3) + y(y_2 - y_3) - \tfrac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2) - \tfrac{1}{2}(y_2^2 - y_3^2) = 0.$$

Die beiden andern erhält man durch cyklische Vertauschung. Durch Addition der drei Gleichungen verschwindet die linke Seite wieder identisch.

Aufg. 9. Die Gleichungen der beiden Geraden zu ermitteln, die durch $(3, -5)$ gehen und die Gerade

$$7x + 2y - 4 = 0$$

unter 45^0 schneiden.

Aufg. 10. Beweise, dafs bei schiefwinkligen Koordinaten zwei Geraden mit den Richtungskoeffizienten μ_1 und μ_2 zu einander normal sind, wenn $\mu_1\mu_2 = -1 - (\mu_1 + \mu_2)\cos w$ ist, und umgekehrt (§ 19, Aufg. 1). Für $w = 90^0$ erhält man dann wieder $\mu_1\mu_2 = -1$.

Aufg. 11. Zeige, dafs im schiefwinkligen Systeme die Senkrechten zur x-Achse und zur y-Achse die Richtungskoeffizienten $-\frac{1}{\cos w}$ und $-\cos w$ haben.

§ 25. Die Bedingung zu finden, unter der sich die drei Geraden $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ und $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ in einem und demselben Punkte schneiden. Die Gleichung des Strahlenbüschels.

Damit die drei Geraden durch einen und denselben Punkt gehen, ist notwendig und hinreichend, dafs die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden ersten Geraden (§ 23) der Gleichung der dritten Geraden genügen. Man findet daher die gewünschte Bedingung in der Form:

$$A_3(B_1C_2 - B_2C_1) + B_3(C_1A_2 - C_2A_1) + C_3(A_1B_2 - A_2B_1) = 0,$$

oder anders geordnet:

$$A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + B_1(C_2A_3 - C_3A_2) + C_1(A_2B_3 - A_3B_2) = 0.$$

Es läfst sich aber noch ein anderes Kriterium angeben, das in vielen Fällen leichter zu handhaben ist.

Zu diesem Zwecke bezeichne man die Ausdrücke

$$A_1x + B_1y + C_1, \quad A_2x + B_2y + C_2 \quad \text{und} \quad A_3x + B_3y + C_3$$

zur Abkürzung mit G_1, G_2 und G_3, wodurch die Gleichungen der drei Geraden in der symbolischen Form $G_1 = 0$, $G_2 = 0$ und $G_3 = 0$ erscheinen. Man erkennt alsdann zunächst, dafs jede Gerade, die durch den Schnittpunkt S der beiden ersten Geraden $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ hindurchgeht, eine Gleichung von der Form $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$ besitzt und dafs umgekehrt jede Gleichung von dieser Form eine bestimmte durch S gehende Gerade darstellt. Das letzte ist unmittelbar klar, da die Gleichung $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$ in Bezug auf x und y linear ist und durch die Koordinaten von S, für die ja G_1 und G_2 einzeln verschwinden, erfüllt wird. Andererseits aber kann man das Verhältnis der beiden Multiplikatoren λ_1 und λ_2 — und nur auf ihr Verhältnis kommt es offenbar an — stets eindeutig so bestimmen, dafs die Gerade

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0,$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

beispielsweise durch einen beliebig gegebenen, von S verschiedenen Punkt (x_0, y_0) hindurchgeht, oder auch einen vorgeschriebenen Richtungskoeffizienten μ besitzt. Im ersten Falle nämlich setze man $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2}{A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1}$, im zweiten berechne man $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ aus $\mu = -\frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2}$. Damit ist auch der erste Teil unserer Behauptung erwiesen.

Alle durch S hindurchgehenden Strahlen bilden ein sogenanntes Strahlenbüschel. Man kann also jeden Strahl des durch die Geraden $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ bestimmten Strahlenbüschels durch eine Gleichung von der Form $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$ darstellen, insofern man nur die Multiplikatoren λ_1 und λ_2, die man auch variable Parameter nennt, passend bestimmt. Die Gleichung $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$ heifst daher kurz die Gleichung des durch $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ bestimmten Strahlenbüschels.

Um nun zu entscheiden, ob eine dritte Gerade $G_3 = 0$ dem Strahlenbüschel $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$ angehöre, bestimme man λ_1 und λ_2 so, dafs die Gerade $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$ durch irgend einen Punkt von $G_3 = 0$ hindurchgeht. Gehört jetzt die Gerade $G_3 = 0$ dem Büschel an, so mufs sie mit der soeben eindeutig bestimmten Geraden $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$ identisch sein. Nach § 20 können sich dann aber die Ausdrücke G_3 und $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$ nur durch einen konstanten, von Null verschiedenen Faktor unterscheiden. Bezeichnen wir diesen mit $-\lambda_3$, so mufs für jedes Wertepaar x, y die Identität

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 \equiv -\lambda_3 G_3,$$

oder

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 \equiv 0$$

stattfinden. Umgekehrt, wenn man drei von Null verschiedene Multiplikatoren λ_1, λ_2, λ_3 so bestimmen kann, dafs der Ausdruck $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3$ identisch verschwindet, so gehen die drei Geraden $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ durch einen und denselben Punkt. Denn setzt man in die Identität

$$\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 \equiv 0$$

die Koordinaten des Schnittpunktes S von $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ ein, so erhält man, weil G_1 und G_2 aldann einzeln ver-

schwinden, $\lambda_3 G_3 = 0$ und folglich $G_3 = 0$, d. h. S liegt auch auf $G_3 = 0$. Wir erhalten somit den wichtigen Satz:

Damit drei Geraden $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ sich in einem und demselben Punkte schneiden, ist notwendig und hinreichend, dafs drei von Null verschiedene Multiplikatoren λ_1, λ_2, λ_3 existieren, für die die Identität $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 \equiv 0$ stattfindet.

Mit Benutzung dieses Satzes folgt jetzt aus früher behandelten Beispielen, dafs sich in jedem Dreiecke die Mittellinien (§ 16, Auf. 6), die Höhen (§ 24, Aufg. 7) und die Senkrechten in den Mitten der Seiten (§ 24, Aufg. 8) je in einem und demselben Punkte schneiden.

Aufg. 1. Untersuche durch Anwendung der beiden im Texte gegebenen Kriterien, ob sich die Geraden $3x - 5y - 7 = 0$, $7x + 2y - 4 = 0$, $10x - 3y - 11 = 0$ in demselben Punkte schneiden.

Aufg. 2. Löse dieselbe Aufgabe für die Geraden $x - 2y = 0$, $3x + 5y = 0$, $2x + 7y + 3 = 0$.

Aufg. 3. Untersuche das durch die Geraden $x = 0$, $y = 0$ bestimmte Strahlenbüschel. Diskutiere ebenso die Gleichung $y - y_1 = \mu(x - x_1)$ als die Gleichung des durch die Geraden $x = x_1$, $y = y_1$ bestimmten Strahlenbüschels.

Aufg. 4. Diskutiere die Formel in § 23, Aufg. 6 für den Fall, dafs Zähler oder Nenner verschwinden.

Aufg. 5. Jedem Werte des Verhältnisses $\lambda_1 : \lambda_2$ entspricht eine ganz bestimmte Gerade des Büschels $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$, und umgekehrt. Man erhält daher sämtliche Strahlen des Büschels, wenn man jenes Verhältnis alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen läfst. Welchen Werten von $\lambda_1 : \lambda_2$ entsprechen die beiden Geraden $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$? Man untersuche speziell den Fall, dafs $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ einander parallel sind.

Aufg. 6. Die drei Geraden $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ mögen sich in demselben Punkte schneiden. Dann giebt es drei Faktoren λ_1, λ_2, λ_3, sodafs $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 \equiv 0$ ist. Angenommen, die drei Faktoren λ_1', λ_2', λ_3' leisteten das Gleiche, so mufs sein $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \lambda_1' : \lambda_2' : \lambda_3'$. In diesem Sinne sind also jene drei Multiplikatoren eindeutig.

Aufg. 7. Was folgt aus der Identität $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 \equiv 0$, wenn einer oder mehrere der Faktoren λ gleich Null sind?

Aufg. 8. Man beweise, dafs die Mittellinien eines Dreiecks, mit den Seiten $CB = a$, $CA = b$, $AB = c$, sich in einem Punkte schneiden. (Man wähle CB als x-Achse und CA als y-Achse eines schiefwinkligen Systemes.)

Aufg. 9. Durch die Geraden $2x - 7y + 11 = 0$ und $5x + 3y - 1 = 0$ sei ein Strahlenbüschel definiert. Wie heifsen die Gleichungen der Strahlen des Büschels, die durch die Punkte $(-2, 3)$, $(5, 0)$, $(0, 0)$ gehen, sowie der Strahlen, die den Achsen parallel sind?

Aufg. 10. Von den Strahlen des durch $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ und $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ bestimmten Büschels geht einer durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $A_1'x + B_1'y + C_1' = 0$ und $A_2'x + B_2'y + C_2' = 0$, während zwei andere diesen Geraden parallel sind. Bestimme die Gleichungen dieser drei Strahlen. Lasse insbesondere die beiden Geraden mit den Achsen zusammenfallen.

§ 26. Die Gleichungen der Winkelhalbierenden zweier Geraden zu finden.

Unter Voraussetzung rechtwinkliger Koordinaten mögen die Gleichungen der beiden Geraden in der Normalform gegeben sein und heifsen:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - \delta_1 = 0,$$
$$x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - \delta_2 = 0.$$

Wir wollen die linken Seiten der beiden Gleichungen zur Abkürzung mit g_1 und g_2 bezeichnen. Es ist dann g_1 der mit dem entgegengesetzten Zeichen genommene Abstand des Punktes (x, y) von der ersten Geraden und ebenso g_2 der mit dem entgegengesetzten Zeichen genommene Abstand des Punktes (x, y) von der zweiten Geraden. Die Halbierungslinie des Winkels der beiden Geraden $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$, in dem sich der Anfangspunkt befindet, ist dann dadurch ausgezeichnet, dafs jeder ihrer Punkte (x, y) von den beiden Geraden auch hinsichtlich des Vorzeichens gleiche Abstände besitzt. Für

jeden Punkt (x, y) dieser Halbierungslinie, und nur für einen solchen, ist daher

$$g_1 = g_2,$$

oder ausführlicher:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - \delta_1 = x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - \delta_2,$$

und dies ist daher die Gleichung der betreffenden Halbierungslinie. Die Punkte der andern, darauf senkrecht stehenden Halbierungslinie aber haben allemal entgegengesetzt gleiche Abstände von den beiden gegebenen Geraden; für sie ist daher

$$g_1 = -g_2,$$

und folglich lautet die Gleichung dieser zweiten Winkelhalbierenden:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - \delta_1 = -(x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - \delta_2).$$

Behalten wir die abgekürzte Bezeichnung bei, so können wir also die Gleichungen der Winkelhalbierenden der beiden Geraden $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ in der Form schreiben:

$$g_1 - g_2 = 0 \quad \text{und} \quad g_1 + g_2 = 0.$$

Aufg. 1. Die Seiten eines Dreiecks seien durch die Gleichungen

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - \delta_1 = 0, \quad x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - \delta_2 = 0,$$
$$x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - \delta_3 = 0,$$

oder abgekürzt durch $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 0$ gegeben. Nimmt man den Anfangspunkt im Innern des Dreiecks an, so heifsen die Gleichungen der Halbierungslinien der Dreieckswinkel:

$$g_2 - g_3 = 0, \quad g_3 - g_1 = 0, \quad g_1 - g_2 = 0$$

und der Halbierungslinien der entsprechenden Aufsenwinkel:

$$g_2 + g_3 = 0, \quad g_3 + g_1 = 0, \quad g_1 + g_2 = 0.$$

Addiert man die drei ersten Gleichungen (man habe immer vor Augen, welche Ausdrücke g_1, g_2, g_3 bedeuten), so erhält man identisch Null, d. h. die drei Halbierungslinien der Dreieckswinkel gehen durch einen Punkt. In ähnlicher Weise kann man aber auch z. B. aus den Gleichungen

$$g_2 - g_3 = 0, \quad g_3 + g_1 = 0, \quad g_1 + g_2 = 0$$

(indem man sie mit 1, 1, — 1 multipliziert und addiert) identisch Null erhalten und so den Satz beweisen: Die Hal-

bierungslinien je zweier Aufsenwinkel und des dritten Dreieckswinkels treffen sich in einem Punkte.

Aufg. 2. Bestimme (durch Reduktion auf die Normalform) die Gleichungen der Halbierungslinien von

$$4x - 3y - 2 = 0 \quad \text{und} \quad 5y + 12x + 3 = 0$$

und zeige, dafs sie auf einander senkrecht stehen.

Aufg. 3. Löse dieselbe Aufgabe für die Geraden

$$y = \mu_1 x + b_1, \quad y = \mu_2 x + b_2.$$

Aufg. 4. Zeige, dafs die Gleichungen der Winkelhalbierenden der Geraden

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \text{und} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

sich in der Form

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

darstellen lassen.

Aufg. 5. Unter Benutzung derselben Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in Aufg. 1 ist zunächst einzusehen, dafs $g_1 + g_2 + g_3 = 0$ die Gleichung einer Geraden ist, die durch den Schnittpunkt von $g_1 = 0$ und $g_2 + g_3 = 0$ hindurchgeht (§ 25). Daraus ist dann folgender Satz leicht abzuleiten: Die Halbierungslinien der drei Aufsenwinkel eines Dreiecks schneiden die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten der Geraden $g_1 + g_2 + g_3 = 0$.

Aufg. 6. Ebenso ist zu zeigen, dafs $g_1 - g_2 - g_3 = 0$ die Gleichung einer Geraden ist, die durch den Schnittpunkt von $g_1 = 0$ und $g_2 + g_3 = 0$, aber auch durch den Schnittpunkt von $g_2 = 0$ und $g_3 - g_1 = 0$ und endlich auch durch den Schnittpunkt von $g_3 = 0$ und $g_1 - g_2 = 0$ hindurchgeht. Dies führt zu dem Satze: Die Halbierungslinien zweier innerer Winkel und des dritten Aufsenwinkels eines Dreiecks schneiden die gegenüberliegenden Seiten in Punkten einer Geraden. Solcher Geraden giebt es dann aber drei, ihre Gleichungen sind:

$$g_1 - g_2 - g_3 = 0, \quad g_2 - g_3 - g_1 = 0, \quad g_3 - g_1 - g_2 = 0.$$

Aufg. 7. Diskutiere das Strahlenbüschel $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 = 0$ und beachte insbesondere die Werte $\lambda_1 : \lambda_2 = +1, -1, 0, \infty$.

Untersuche speziell den Fall, dafs $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ einander parallel sind.

Aufg. 8. Die Höhen des durch die Geraden $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 0$ gebildeten Dreiecks haben die Gleichungen $g_2 \cos \gamma_2 - g_3 \cos \gamma_3 = 0$ etc., wenn γ_1, γ_2, γ_3 die Dreieckswinkel sind. Beweise dies sowohl direkt geometrisch als auch mit Hülfe der Betrachtungen des § 25. Beachte, dafs man durch Addition der drei Höhengleichungen identisch Null erhält.

Aufg. 9. Gieb die Gleichungen der durch den Anfangspunkt gehenden Strahlen an, die den ersten und zweiten Quadranten in 2, 4, 8 etc. gleiche Teile teilen.

§ 27. Affine Punktsysteme.

In einem beliebigen Systeme von Parallelkoordinaten sei eine endliche oder unendliche Anzahl von Punkten $P_1', P_2', P_3', \ldots$ gegeben, deren Gesamtheit wir ein Punktsystem nennen wollen. Aus diesem Punktsysteme können wir ein anderes $P_1'', P_2'', P_3'', \ldots$ dadurch ableiten, dafs wir die Abscissen $x_1', x_2', x_3', \ldots$ der Punkte $P_1', P_2', P_3', \ldots$ ungeändert lassen, ihre Ordinaten $y_1', y_2', y_3', \ldots$ aber mit dem konstanten Verhältnisse $b : a$ multiplizieren. Die Koordinaten der Punkte P_i'' $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ sind daher mit denen der entsprechenden Punkte P_i' durch die Gleichungen verbunden:

$$(1) \qquad x_i'' = x_i', \quad y_i'' = \frac{b}{a} y_i' \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Zwei derartige Punktsysteme nennt man affin, und man erkennt, dafs, wenn das Affinitätsverhältnis $b : a$ von dem ersten Systeme zu dem zweiten führt, man durch das reziproke Verhältnis $a : b$ von dem zweiten wieder zu dem ersten zurückgelangt. Die Affinität zweier Systeme ist also stets eine gegenseitige.

Aus der Definition der Affinität zweier Punktsysteme folgt zunächst, dafs die Punkte der x-Achse, die auch Affinitätsachse heifst, sich selbst entsprechen. Eine einfache geometrische Betrachtung zeigt sodann ferner, dafs ganz allgemein

den Punkten einer beliebigen Geraden stets im affinen Systeme wieder die Punkte einer Geraden entsprechen. Um dies auch analytisch festzustellen, nehmen wir an, in dem ersten Systeme sei eine Gerade f' gegeben durch die Gleichung

$$y' = \mu x' + n. \tag{2}$$

Den Punkten P' von f' entsprechen dann in dem zweiten Systeme Punkte P'', deren Koordinaten, mit Rücksicht auf (1) und (2), der Gleichung genügen

$$y'' = \frac{b}{a}(\mu x'' + n), \text{ d. h.:} \tag{3}$$

Den Punkten P' einer Geraden f' entsprechen im affinen Systeme die Punkte P'' einer Geraden f''. Die beiden affinen Geraden treffen sich auf der Affinitätsachse. Der Richtungskoeffizient von f'' ist gleich dem von f', multipliziert mit dem Affinitätsverhältnisse $b : a$, das von f' zu f'' geführt hatte. Parallelen Geraden $f_1', f_2', f_3', \ldots$ des ersten Systemes, mit dem gemeinschaftlichen Richtungskoeffizienten μ, entsprechen daher in dem zweiten Systeme wieder parallele Geraden, mit dem gemeinschaftlichen Richtungskoeffizienten $\frac{b}{a}\mu$.

Wählt man auf einer Geraden f' ein beliebiges Stück $P_1'P_2'$ und auf der entsprechenden Geraden f'' das entsprechende Stück $P_1''P_2''$, so ergiebt sich aus (1), wie auch durch eine einfache geometrische Überlegung, dafs entsprechende Punkte P' und P'' von f' und f'' mit den Strecken $P_1'P_2'$ und $P_1''P_2''$ gleiche Teilverhältnisse bestimmen, und dafs auch umgekehrt Punkte mit gleichen Teilverhältnissen entsprechende sind. Insbesondere sind daher die Mittelpunkte M' und M'' von $P_1'P_2'$ und $P_1''P_2''$ entsprechende Punkte der beiden affinen Systeme.

Konstruiert man ferner zu einem beliebigen Polygone $P_1'P_2' \ldots P_n'$ das affine Polygon $P_1''P_2'' \ldots P_n''$ und berechnet nach § 13 die Inhalte J' und J'', so folgt aus Gl. (1):

$$J'' = \frac{b}{a} J'. \tag{4}$$

Der in dieser Gleichung ausgesprochene Satz läfst noch eine Verallgemeinerung zu. Betrachtet man nämlich eine krummlinig begrenzte, geschlossene Figur als die Grenze, der sich ein eingeschriebenes Polygon dadurch nähert, dafs die Anzahl der Polygonseiten ins Unendliche wächst, und berücksichtigt, dafs der in Gl. (4) enthaltene Satz ganz unabhängig von der Anzahl der Polygonseiten ist, so ergiebt sich die wichtige Folgerung:

Konstruiert man zu einer beliebigen krummlinig oder geradlinig begrenzten, geschlossenen Figur, mit Benutzung des Affinitätsverhältnisses $b : a$, die affine Figur, so erhält man den Inhalt der zweiten, indem man den Inhalt der ersten mit dem Affinitätsverhältnisse $b : a$ multipliziert.

Aufg. 1. Zeichne einem Kreise reguläre Polygone von 3, 4, 5, 6, 8, 10 Seiten ein und konstruiere, unter Voraussetzung eines beliebigen Affinitätsverhältnisses, einer beliebigen Affinitätsachse und einer beliebigen Ordinatenachse, je die affine Figur. Benutze dabei den Satz, dafs affine Geraden sich auf der Affinitätsachse schneiden. Wähle sodann speziell eine Symmetrielinie der gegebenen Polygone als Affinitätsachse.

Aufg. 2. Ist in zwei affinen Systemen die Affinitätsachse die einzige Gerade, die sich selbst entspricht? Zeige, dafs es solcher unendlich viele giebt, beachte aber, dafs die einzelnen Punkte sich nicht immer selbst entsprechen.

Aufg. 3. Können affine Geraden einander parallel sein?

Aufg. 4. Zeige, dafs in affinen Systemen entsprechende Winkel im allgemeinen nicht einander gleich, affine Dreiecke also einander nicht ähnlich sind.

Aufg. 5. Durch die Geraden $2x - 5y + 3 = 0$ und $3x + y - 2 = 0$ wird ein Strahlenbüschel bestimmt. Gieb für $b : a = 2$ die Gleichung des affinen Büschels an und studiere das gegenseitige Verhalten beider Büschel mit besonderer Berücksichtigung der Aufgaben (2) und (3).

Aufg. 6. Bestimme den Winkel der zu den Geraden $y = \mu x + n_1$ und $y = -\frac{1}{\mu} x + n_2$ affinen Geraden.

Aufg. 7. Studiere die Affinität, die dem Verhältnisse $b : a = -1$ entspricht (schiefe und rechtwinklige Symmetrie; Symmetrieachse).

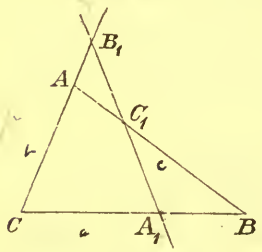
§ 28. Sätze aus der Theorie der Transversalen. Das vollständige Viereck.

I. Die Seiten $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ des Dreiecks ABC mögen von einer beliebigen Transversalen in den Punkten A_1, B_1, C_1, mit den Teilverhältnissen

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \lambda, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \mu, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \nu,$$

getroffen werden. Da durch λ und μ die Transversale und folglich auch ν eindeutig bestimmt sind, so mufs zwischen λ, μ und ν eine Relation bestehen.

Fig. 20.



Um diese Beziehung zu finden, wählen wir CB zur x-Achse und CA zur y-Achse eines schiefwinkligen Systemes. Dann folgt aus § 9, dafs die Abscisse von A_1 gleich $\frac{a}{1+\lambda}$ und die Ordinate von B_1 gleich $\frac{\mu b}{1+\mu}$ ist. Die Gleichungen von AB und A_1B_1 sind daher (§ 18):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$\frac{x}{a}(1+\lambda) + \frac{y}{b}\frac{1+\mu}{\mu} = 1.$$

Daraus ergiebt sich die Abscisse des Schnittpunktes C_1 (§ 23) gleich $\frac{a}{1-\lambda\mu}$. Diese ist aber andrerseits auch gleich $\frac{\nu a}{1+\nu}$, da C_1 in Bezug auf die Strecke AB das Teilverhältnis ν besitzt. Aus

$$\frac{\nu a}{1+\nu} = \frac{a}{1-\lambda\mu}$$

folgt daher:

(1) $$\lambda\mu\nu = -1,$$

oder:

(2) $$\frac{BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1}{A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B} = -1.$$

Diese Relation heifst der Satz des Menelaus.

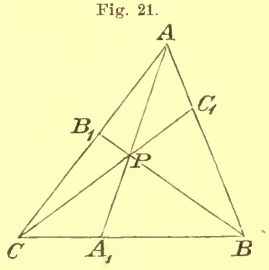
Der Satz gilt stets, wie man auch auf den drei Dreiecksseiten die Punkte A_1, B_1, C_1 wählen mag, vorausgesetzt nur, dafs sie in einer Geraden liegen. Aber auch umgekehrt, wenn für irgend welche Punkte A_1, B_1, C_1 der drei Dreiecksseiten der Satz gilt, so müssen sich diese Punkte auf einer Geraden befinden. Denn für gegebene Werte von λ und μ giebt es eben nur ein einziges ν, das der Gleichung (1) genügt. Der Satz des Menelaus enthält also nicht nur ein notwendiges, sondern auch ein hinreichendes Kennzeichen dafür, dafs drei Punkte A_1, B_1, C_1 der drei Dreiecksseiten auf einer Geraden liegen.

II. Verbindet man einen beliebigen Punkt P mit den Ecken A, B, C eines Dreiecks, so treffen diese Verbindungslinien die gegenüberliegenden Seiten in Punkten A_1, B_1, C_1, denen die Teilverhältnisse

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \lambda, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \mu, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \nu$$

zukommen mögen. Da λ und μ den Punkt P und folglich auch C_1 eindeutig bestimmen, so mufs es möglich sein, ν aus λ und μ zu berechnen.

Fig. 21.



Indem wir uns desselben Koordinatensystemes bedienen wie bei I, erhalten wir wieder für A_1 die Abscisse $\frac{a}{1+\lambda}$, für B_1 die Ordinate $\frac{\mu b}{1+\mu}$, so dafs die Gleichungen von AA_1 und BB_1 geschrieben werden können

$$\frac{x}{a}(1+\lambda) + \frac{y}{b} = 1,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\frac{1+\mu}{\mu} = 1.$$

Durch Subtraktion erhält man:

$$\frac{x}{a}\lambda - \frac{y}{b}\frac{1}{\mu} = 0,$$

als die Gleichung einer durch P gehenden Geraden (§ 25), die, da das absolute Glied fehlt, keine andere sein kann als CC_1. Aus der Gleichung von CC_1 und der Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

von AB findet man die Abscisse $\frac{a}{1+\lambda\mu}$ des Punktes C_1, der andrerseits auch die Abscisse $\frac{\nu a}{1+\nu}$ besitzt. Aus

$$\frac{\nu a}{1+\nu} = \frac{a}{1+\lambda\mu}$$

folgt aber:

(3) $$\lambda\mu\nu = +1,$$

oder:

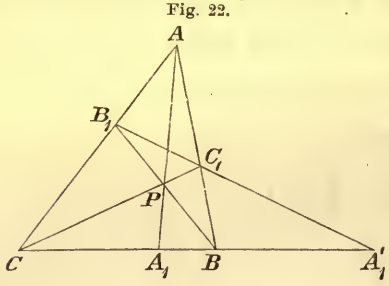
(4) $$\frac{BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1}{A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B} = +1.$$

Diese Relation heifst der Satz des Ceva.

Wie der Satz des Menelaus so ist auch der des Ceva umkehrbar. Denn da sich aus (3) zu gegebenen Werten von λ und μ stets nur einziges ν ergiebt, so folgt, dafs, sobald für drei durch die Ecken eines Dreiecks gehende Geraden der Satz des Ceva gilt, diese durch einen Punkt gehen müssen. Der Satz des Ceva liefert also ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, dafs sich drei durch die Ecken eines Dreiecks gehende Geraden in einem Punkte schneiden.

III. In folgender Weise lassen sich die Resultate von I und II kombinieren. Wir verbinden B_1C_1 durch eine Transversale, die die Seite BC in dem Punkte A_1' treffen möge. A_1' bildet dann mit BC das Teilverhältnis $\frac{BA_1'}{A_1'C}$, das wir mit λ' bezeichnen. Bedeuten wieder λ, μ, ν die Teilverhältnisse von A_1, B_1, C_1, so kann man zunächst auf die Transversale $B_1C_1A_1'$ den Satz I anwenden und erhält:

Fig. 22.



$$\lambda'\mu\nu = -1.$$

Andrerseits ist infolge von Satz II:

$$\lambda\mu\nu = +1,$$

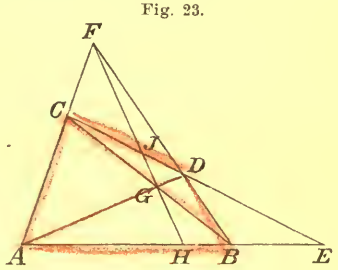
woraus sich ergiebt:

$$\lambda' = -\lambda,$$

d. h. die Punkte B, C werden durch die Punkte A_1, A_1' harmonisch getrennt.

Seien jetzt vier beliebige Punkte A, B, C, D gegeben, so kann man sie als die Ecken eines vollständigen Vierecks mit den sechs Seiten AB, CD; AC, BD; AD, BC betrachten, die sich noch in den Diagonalpunkten E, F, G treffen. Verbindet man dann F mit G durch eine Gerade, die AB in H, CD in J schneidet, so erkennt man leicht, dafs A, B durch E, H und ebenso C, D durch E, J harmonisch getrennt werden. Man braucht nämlich nur den soeben bewiesenen, aus der Kombination von I und II hervorgegangenen Satz das eine Mal anzuwenden auf das Dreieck ABF, mit der Transversalen CD und dem Punkte G, das andere Mal auf das Dreieck CDF, mit der Transversalen AB und dem Punkte G. In ähnlicher Weise erkennt man, dafs die Verbindungslinie EG die Seiten AC und BD in Punkten trifft, die, mit F als zugeordnetem Punkte, A, C und B, D harmonisch trennen. Und endlich schneidet auch die Verbindungslinie EF die Seiten AD und BC in Punkten, die, mit G als zugeordnetem Punkte, die Punkte A, D und B, C harmonisch trennen. So erhalten wir also durch Verbindung der drei Diagonalpunkte E, F, G auf jeder der sechs Seiten des vollständigen Vierecks harmonische Gruppen. Diese harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks gestatten, in einfacher Weise, durch Anwendung des Lineals allein, zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt zu konstruieren.

Fig. 23.



Aufg. 1. Beachte bei den Sätzen von Menelaus und Ceva jedesmal die Vorzeichen der in Betracht kommenden Strecken. Wähle für λ und μ spezielle Zahlenwerte und bestimme jedesmal ν.

Aufg. 2. Beweise mit Hülfe des Satzes des Menelaus die beiden in den Aufgaben 5 und 6 des § 26 enthaltenen Sätze.

Aufg. 3. Beweise mit Hülfe des Ceva'schen Satzes, dafs sich in jedem Dreiecke die folgenden Geraden in je einem Punkte schneiden: 1) die drei Höhen; 2) die drei Schwerpunktstransversalen; 3) die drei Halbierungslinien der Dreieckswinkel; 4) die Halbierungslinien je zweier Aufsenwinkel und des dritten Dreieckswinkels; 5) die drei Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kreises.

Aufg. 4. Man suche zu drei Punkten A, B, C den vierten harmonischen, C zugeordneten Punkt a) wenn C zwischen A und B, b) wenn C aufserhalb der Strecke AB liegt.

§ 29. Geometrische Örter.

Unter dem geometrischen Orte eines Punktes versteht man bekanntlich eine Linie, deren sämtliche Punkte einer und derselben Bedingung unterworfen sind. Denkt man sich diese Bedingung durch die Koordinaten x, y des Punktes, dessen Ort bestimmt werden soll, ausgedrückt, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, die allemal, aber auch nur dann, erfüllt wird, wenn der Punkt (x, y) dem gesuchten Orte angehört, und die man daher als die Gleichung des Ortes bezeichnen kann. Die folgenden Aufgaben sollen dies noch weiter erläutern.

Aufg. 1. Den Ort des Punktes zu bestimmen, der von zwei festen Punkten (a_1, b_1) und (a_2, b_2) gleiche Abstände hat.

Bezeichnet man die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes, dessen Ort bestimmt werden soll, mit x, y, so sind diese der Bedingung unterworfen:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2,$$

aus der durch einfache Reduktion folgt:

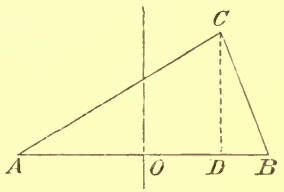
$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y = a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Geraden, die im Mittelpunkte $\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2}\right)$ der Verbindungslinie der gegebenen Punkte auf dieser senkrecht steht (§ 24).

Aufg. 2. Von einem Dreiecke seien gegeben die Basis und die Differenz der Quadrate der Seiten; man suche den Ort der Spitze.

Wir wählen die Basis $AB = 2c$ zur Abscissenachse eines rechtwinkligen Achsensystemes, mit dem Mittelpunkte O von AB als Anfangspunkt. Dann haben wir die Bedingung

Fig. 24.



$$AC^2 - BC^2 = d^2$$

(wo d^2 die gegebene Differenz ist) durch die Koordinaten x, y der Spitze C auszudrücken. Es ist aber:

$$AC^2 = (c + x)^2 + y^2, \quad BC^2 = (c - x)^2 + y^2,$$

folglich:

$$AC^2 - BC^2 = 4cx = d^2,$$

oder:

$$x = \frac{d^2}{4c},$$

d. h. der Ort ist die Senkrechte, die man auf der Basis im Abstande $\frac{d^2}{4c}$ vom Anfangspunkte errichten kann. —

Bei vielen Aufgaben, die sich auf geometrische Örter beziehen, ist es nicht möglich, die Bedingung, der der veränderliche Punkt unterworfen ist, direkt durch eine zwischen den Koordinaten x, y bestehende Gleichung auszudrücken. Man ist vielmehr oft genötigt, zunächst x und y einzeln durch andere Veränderliche auszudrücken oder Relationen zwischen x, y und diesen anderen Veränderlichen herzustellen, und man erhält dann die Gleichung des Ortes erst durch Elimination dieser Veränderlichen. Solche veränderliche Hülfsgrößen nennt man Parameter. Ein Beispiel hierfür haben wir bereits in den Gleichungen (1) des § 9 kennen gelernt, in denen die Koordinaten x, y eines beliebigen Punktes P einer Geraden P_1P_2 durch den veränderlichen Parameter λ, das Teilverhältnis von P mit der Strecke P_1P_2, ausgedrückt wurden. Die Elimination von λ führte dann zu der Gleichung von P_1P_2 (vergl Gl. (2) von § 9 und Aufg. 9 von § 16). Wir geben noch einige weitere Beispiele.

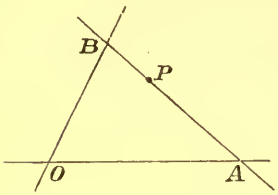
Aufg. 3. In einem schiefwinkligen Achsensysteme bewege sich eine Gerade so, daſs die Summe ihrer Achsenabschnitte konstant ist. Jedesmal werde das zwischen den

Achsen befindliche Stück der Geraden durch einen Punkt in einem konstanten Teilverhältnisse geteilt. Welches ist der Ort dieses Punktes?

Es sei $OA = a, \quad OB = b,$

$a + b = c$ und $\frac{AP}{PB} = \lambda$. Die Koordinaten von P heifsen dann:

Fig. 25.



$$x = \frac{a}{1+\lambda}, \quad y = \frac{\lambda b}{1+\lambda}.$$

Da nun $a + b = c$ sein soll, so löst man am einfachsten die beiden Gleichungen für x und y nach a und b auf und addiert. Man erhält dann sofort als Gleichung des gesuchten Ortes: $\lambda x + y = \frac{\lambda c}{1+\lambda}$.

Aufg. 4. Wie in der vorhergehenden Aufgabe sei die Summe der veränderlichen Achsenabschnitte a und b gleich der Konstanten c. In den Endpunkten A und B von a und b errichte man jedesmal die Senkrechten auf der x-Achse und der y-Achse. Der Ort der Schnittpunkte dieser Senkrechten ist dann eine Gerade mit der Gleichung $x + y = \frac{c}{1 + c \cos w}$.

Aufg. 5. Bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte der einem beliebigen Vierecke eingeschriebenen Parallelogramme, unter Benutzung der Diagonalen des Vierecks als Koordinatenachsen. —

Der gesuchte geometrische Ort kann unter Umständen auch aus mehreren geraden Linien bestehen. Analytisch wird sich dies dadurch bemerkbar machen, dafs die Gleichung des Ortes sich als Produkt mehrerer linearer Gleichungen darstellt und daher in so viele einzelne Gleichungen zerfällt, als Faktoren vorhanden sind. So stellt z. B. die Gleichung

$$(A_1 x + B_1 y + C_1)\,(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$$

offenbar nichts anderes dar als die beiden Geraden:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \text{und} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

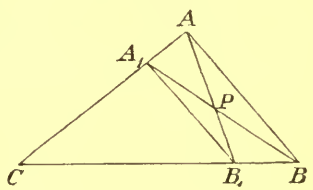
Die folgende Aufgabe giebt hierfür ein Beispiel.

Aufg. 6. Zu der einen Seite eines Dreiecks werden Parallelen gezogen und die mit den beiden anderen Seiten des

Dreiecks gebildeten Schnittpunkte jedesmal mit den Gegenpunkten verbunden. Man suche den Ort des Schnittpunktes dieser Verbindungslinien.

Man wähle CB und CA als Koordinatenachsen eines schiefwinkligen Systemes. Da die Achsenabschnitte der zur dritten Dreiecksseite AB parallelen Geraden A_1B_1 den Seiten $CB = a$ und $CA = b$ proportional sind, so kann man sie durch $\frac{a}{\lambda}$ und $\frac{b}{\lambda}$ ausdrücken, insofern λ einen veränderlichen Parameter bedeutet. Jeder der unzählig vielen Parallelen entspricht dann ein ganz bestimmter Wert von λ, und umgekehrt gehört zu jedem λ eine ganz bestimmte Parallele zu AB.

Fig. 26.



Die Gleichungen von A_1B und AB_1 lauten nun:

$$\frac{x}{a} + \frac{\lambda y}{b} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\lambda x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Die Elimination von λ aus diesen beiden Gleichungen führt zu:

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right)\frac{x}{a} = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\frac{y}{b},$$

oder:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} - \frac{y}{b},$$

oder endlich:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0.$$

Der erste Faktor, gleich Null gesetzt, stellt die durch C gehende Mittellinie des Dreiecks dar (§ 25, Aufg. 8). Der zweite Faktor, gleich Null gesetzt, liefert die Gerade AB, deren sämtliche Punkte zu dem gesuchten Orte zu rechnen sind, wie man erkennt, wenn A_1 mit A und B_1 mit B zusammenfallen.

§ 30. Hauptaufgabe und Methode der analytischen Geometrie.

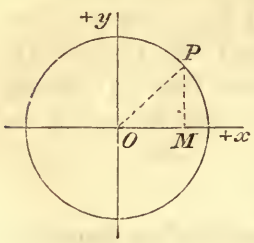
Durch die bisherigen Untersuchungen haben wir einen eigentümlichen Zusammenhang kennen gelernt zwischen einem

geometrischen Gebilde, nämlich einer geraden Linie, einerseits und einer algebraischen Gleichung mit zwei Veränderlichen andererseits. Wir sahen, dafs zu jeder geraden Linie eine Gleichung mit zwei Veränderlichen x und y gehört, die in Bezug auf diese vom ersten Grade ist und die allemal, aber auch nur dann, erfüllt wird, wenn x und y die Koordinaten eines Punktes der Geraden darstellen. Umgekehrt konnten wir jede Gleichung von der Form $Ax + By + C = 0$ als die Gleichung einer geraden Linie deuten. (Wegen dieses Zusammenhanges nennt man auch die Gleichung $Ax+By+C=0$ eine lineare Gleichung.)

Es drängt sich nun die Frage auf, ob, unter Benutzung eines bestimmten Koordinatensystemes, für jede durch ein bestimmtes mathematisches Gesetz definierte Kurve eine Gleichung mit zwei Variabeln x und y gefunden werden kann, die allemal, aber auch nur dann, befriedigt wird, wenn x und y die Koordinaten eines Punktes der Kurve bedeuten, und ob umgekehrt jede zwischen zwei Variabeln x und y bestehende Gleichung in der angegebenen Weise als Gleichung einer bestimmten Kurve gedeutet werden kann.

Die in dem vorhergehenden Paragraphen an einzelnen Beispielen entwickelten Methoden führen zur Beantwortung dieser Fragen. Denn denken wir uns eine Kurve als den geometrischen Ort eines Punktes definiert, der einer bestimmten Bedingung unterworfen ist, so hat man nur diese Bedingung durch die Koordinaten des Punktes, dessen Ort die gegebene Kurve ist, auszudrücken und man erhält eine Gleichung zwischen x und y, die allemal, und nur dann, erfüllt wird, wenn x und y die Koordinaten eines Punktes der Kurve bedeuten. Definiert man z. B. den Kreis als den Ort eines Punktes, dessen Abstand von einem festen Punkte, den wir zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystemes wählen wollen, konstant gleich r ist, so läfst sich die dem Punkte P auferlegte Bedingung durch die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ ausdrücken. Diese Gleichung gilt für alle Punkte des Kreises

Fig. 27.



mit dem Radius r, aber auch nur für diese. Für jeden Punkt innerhalb des Kreises ist $x^2 + y^2 < r^2$, für jeden Punkt aufserhalb des Kreises ist $x^2 + y^2 > r^2$.

Wir werden demnach die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ (weil ausschliefslich den Punkten des Kreises zukommend) als die Gleichung des Kreises mit dem Radius r bezeichnen, indem wir definieren:

Unter der Gleichung einer Kurve in Bezug auf ein gegebenes Koordinatensystem versteht man eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen x und y, die allemal, aber auch nur dann, erfüllt wird, wenn x und y die Koordinaten eines Punktes der Kurve bedeuten.

Für den Fall einer geraden Linie, aber auch nur dann, ist diese Gleichung in Bezug auf x und y linear.

Umgekehrt läfst sich jede Gleichung zwischen zwei Variabeln x und y in dem angegebenen Sinne als die Gleichung einer Kurve deuten. Denn man kann in einer solchen Gleichung der einen Veränderlichen, etwa x, einen beliebigen Wert beilegen und dann die Gleichung nach der andern auflösen. Dadurch erhält man ein Wertepaar x, y, das der Gleichung genügt und das man geometrisch durch einen Punkt mit der Abscisse x und der Ordinate y repräsentieren kann. Wiederholt man dieses Verfahren, indem man x alle möglichen Werte giebt und jedesmal das zugehörige y berechnet, so erhält man eine Aufeinanderfolge von Punkten, die sich zu einer Kurve vereinigen.

Nach diesen Auseinandersetzungen ist z. B. klar, wie man analytisch die Durchschnittspunkte von zwei durch ihre Gleichungen gegebenen Kurven bestimmt. Die Koordinaten der gemeinschaftlichen Punkte müssen den beiden Kurvengleichungen gleichzeitig genügen, und man erhält sie daher als die gemeinschaftlichen Lösungen dieser Gleichungen. Auf diese Weise wird das ursprünglich geometrische Problem in ein rein algebraisches verwandelt.

Wir können nunmehr als das Wesen der analytischen Geometrie die Anwendung algebraischer Methoden auf die Untersuchung geometrischer Gebilde bezeichnen; ihre Aufgabe besteht darin, Kurven in dem oben definierten Sinne durch

Gleichungen zu repräsentieren und aus den Eigenschaften dieser Gleichungen die charakteristischen Eigentümlichkeiten der zugehörigen Kurven zu ergründen.

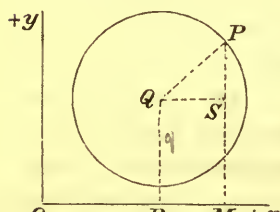
Drittes Kapitel.

Der Kreis.

§ 31. Die Gleichung des Kreises.

Im vorhergehenden Paragraphen wurde die Gleichung des Kreises abgeleitet für den Fall, dafs der Mittelpunkt zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Achsensystemes gewählt worden war. Seien jetzt allgemeiner p, q die rechtwinkligen Koordinaten*) des Mittelpunktes eines Kreises und r der Radius.

Fig. 28.



Um die Gleichung des Kreises zu erhalten, hat man nur auszudrücken, dafs jeder Punkt (x, y) des Kreises vom Mittelpunkte (p, q) den konstanten Abstand r besitzt. Dies führt aber (§ 8) zu der Gleichung:

(1) $\quad (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$

Diese Gleichung wird allemal, aber auch nur dann, erfüllt, wenn der Punkt (x, y) auf dem Kreise liegt. Für jeden Punkt innerhalb des Kreises ist die linke Seite der Gleichung (1) kleiner, für jeden Punkt aufserhalb des Kreises gröfser als r^2.

Aus der allgemeinen Gleichung (1) ergeben sich die speziellen Formen der Kreisgleichung durch besondere Wahl des Mittelpunktes. Liegt dieser auf der x-Achse, so erhält man, wegen $q = 0$, die Gleichung:

(2) $\quad (x-p)^2 + y^2 = r^2.$

Berührt überdies noch der Kreis die y-Achse, d. h. ist $p = r$, so folgt:

(3) $\quad x^2 + y^2 - 2rx = 0.$

---

*) In diesem ganzen Kapitel sollen nur rechtwinklige Koordinaten angewendet werden.

Befindet sich der Mittelpunkt auf der y-Achse, so lautet die Kreisgleichung:

(4) $$x^2 + (y - q)^2 = r^2,$$

die sich auf

(5) $$x^2 + y^2 - 2ry = 0$$

reduziert, wenn aufserdem noch der Kreis die x-Achse berührt.

Fällt der Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte zusammen (§ 20), so heifst die Kreisgleichung:

(6) $$x^2 + y^2 = r^2.$$

Endlich erhält man für einen beliebigen, durch den Anfangspunkt gehenden Kreis, dessen Mittelpunkt die Koordinaten p, q besitzt, wegen $p^2 + q^2 = r^2$, die Gleichung:

(7) $$x^2 + y^2 - 2px - 2qy = 0.$$

Da die Gleichung (1) durch Multiplikation mit einer beliebigen, von Null verschiedenen Konstanten a in ihrer Bedeutung nicht geändert wird, so erkennt man:

Die allgemeine Gleichung eines Kreises ist eine in Bezug auf x und y quadratische Gleichung, in der das Glied mit xy fehlt und die Glieder mit x^2 und y^2 gleiche Koeffizienten besitzen; sie ist also von der Form:

(8) $$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0.$$

Untersuchen wir jetzt, ob auch umgekehrt jede Gleichung dieser Form als die Gleichung eines Kreises angesehen werden kann.

Zu diesem Zwecke dividieren wir die Gleichung (8) durch a und bringen sie sodann auf die Form:

(9) $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c^2}{4a^2} - \frac{d}{a},$$

oder:

$$(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 = r_1^2,$$

insofern wir zur Abkürzung setzen:

$$p_1 = -\frac{b}{2a}, \quad q_1 = -\frac{c}{2a}, \quad r_1 = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 4ad}}{2a}.$$

Ist nun $b^2 + c^2 - 4ad > 0$, also r_1 reell, so folgt, dafs Gleichung (9) und folglich auch Gleichung (8) die Gleichung

eines Kreises mit dem Mittelpunkte (p_1, q_1) und dem Radius r_1 darstellt.

Ist aber $b^2 + c^2 - 4ad < 0$, so kann der Gleichung (9) durch kein reelles Wertepaar (x, y) genügt werden, folglich hat dann auch Gleichung (8) keine geometrische Bedeutung.

Ist endlich $b^2 + c^2 - 4ad = 0$, so wird die Gleichung (8) nur durch die Koordinaten des einen Punktes $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{c}{2a}\right)$ befriedigt.

Aufg. 1. Wie heifst die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkte $(-3, -5)$ und dem Radius $r = 4$? Liegt der Anfangspunkt innerhalb oder aufserhalb des Kreises?

Aufg. 2. Die Gleichung des durch den Anfangspunkt gehenden Kreises mit dem Mittelpunkte $(2, -3)$ zu finden.

Aufg. 3. Wie heifst die Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt $(5, 0)$ ist und der die Gerade $x - y = 0$ berührt?

Aufg. 4. Bestimme die Schnittpunkte des Kreises

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$$

mit den Achsen und zeige, dafs das Produkt der beiden auf der x-Achse gebildeten (vom Anfangspunkte aus gerechneten) Achsenabschnitte gleich dem Produkte der auf der y-Achse gebildeten Abschnitte ist.

Aufg. 5. Es seien m_1, m_2, n_1, n_2 vier Zahlen, die der Relation $m_1 m_2 = n_1 n_2$ genügen. Bestimme die Gleichung des Kreises mit den Achsenabschnitten m_1, m_2, n_1, n_2.

Aufg. 6. Finde den Mittelpunkt und den Radius des Kreises

$$2(x^2 + y^2) - 2x + 6y - 3 = 0.$$

Aufg. 7. Die Gleichungen aller Kreise zu finden, die die x-Achse im Punkte $x = a$ berühren.

Aufg. 8. Die Gleichungen aller Kreise zu finden, die beide Koordinatenachsen berühren.

Aufg. 9. Ein Punkt bewege sich so, dafs das Rechteck aus seinen Koordinaten stets gleich dem Quadrate über seinem Abstande von der Geraden $x + y - a = 0$ ist. Welchen Weg beschreibt der Punkt?

Aufg. 10. Die Gleichung des um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises zu finden, der durch den Punkt $(-5, 3)$ geht.

Aufg. 11. Die Gleichung des um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises zu finden, der die Gerade

$$Ax + By + C = 0$$

berührt.

Aufg. 12. Die Gleichung des Kreises zu finden, dessen Mittelpunkt $(3, -2)$ ist und der die Gerade $y = 7x + 11$ berührt.

§ 32. Bestimmung eines Kreises durch drei Punkte.

Dividiert man die allgemeine Kreisgleichung

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$$

durch a, wodurch die Form

$$x^2 + y^2 + b'x + c'y + d' = 0$$

entsteht, so erkennt man, dafs diese im Grunde genommen nur drei Konstanten enthält, wie auch die Form

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

zeigt. Daraus folgt, dafs man einen Kreis stets so bestimmen kann, dafs er drei vorgeschriebenen Bedingungen genügt, z. B. so, dafs er durch drei gegebene Punkte hindurchgeht. Sind diese (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3), so mufs sein:

$$x_1^2 + y_1^2 + b'x_1 + c'y_1 + d' = 0,$$
$$x_2^2 + y_2^2 + b'x_2 + c'y_2 + d' = 0,$$
$$x_3^2 + y_3^2 + b'x_3 + c'y_3 + d' = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Unbekannten b', c', d'. Bei der Auflösung tritt der gemeinschaftliche Nenner

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2),$$

oder

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3$$

auf, der nur dann verschwindet, wenn die drei gegebenen Punkte in einer Geraden liegen. In jedem andern Falle erhält man daher für b', c', d' bestimmte endliche Werte.

Aufg. 1. Die Gleichung des Kreises zu finden, der dem Dreiecke $(2, 3)$; $(-5, 1)$; $(3, -2)$ umgeschrieben ist.

Aufg. 2. Die Gleichung des Kreises zu finden, der durch den Anfangspunkt und die beiden Punkte (x_1, y_1); (x_2, y_2) hindurchgeht.

Aufg. 3. Bestimme in der im Texte angegebenen Weise b', c', d' und beweise, dafs der Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{b'^2 + c'^2 - 4d'}$ stets reell ist (§ 31).

Aufg. 4. Bestimme den Radius und die Gleichung des Kreises, der durch die Punkte $(0, 0)$; $(1, 2)$; $(-2, -4)$ geht, und diskutiere das Resultat.

§ 33. Der Kreis und die Gerade.

Um die Lage einer beliebigen Geraden in Bezug auf einen Kreis zu untersuchen, wählen wir seinen Mittelpunkt zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Achsensystemes und setzen die Gleichung der Geraden in der Normalform voraus.

Es mögen demnach

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{1}$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta = 0 \tag{2}$$

die Gleichungen des Kreises und der Geraden darstellen.

Die Schnittpunkte ergeben sich, indem man etwa aus (2) y berechnet und in (1) einsetzt. Man erhält dann:

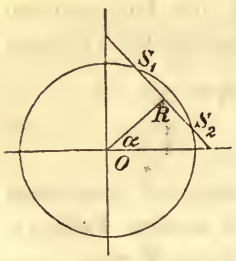
$$x^2 - 2\delta\cos\alpha \cdot x + \delta^2 - r^2\sin^2\alpha = 0, \tag{3}$$

und diese in x quadratische Gleichung liefert die Abscissen der beiden Schnittpunkte. Die Realität der Wurzeln hängt von dem Vorzeichen der Diskriminante

(4) $\delta^2\cos^2\alpha - \delta^2 + r^2\sin^2\alpha = \sin^2\alpha(r^2 - \delta^2)$

ab, woraus man erkennt, dafs jede Gerade den gegebenen Kreis in zwei reellen und von einander verschiedenen, in zwei reellen und zusammenfallenden Punkten, oder gar nicht schneidet, je nachdem $r \gtreqless \delta$, d. h. je nachdem der Abstand der Geraden vom Mittelpunkte des Kreises kleiner, gleich, oder gröfser ist als der Radius.

Fig. 29.



Nehmen wir an, die Schnittpunkte seien reell — wir wollen sie mit S_1 und S_2, ihre Koordinaten mit x_1, y_1 und x_2, y_2 bezeichnen —, dann erhalten wir aus (3), ohne aufzulösen, die Abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$ des Mittelpunktes der Sehne S_1S_2, nämlich:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} = \delta \cos\alpha. \tag{5}$$

Führt man diesen Wert in (2) ein, so findet man die zugehörige Ordinate:

$$y = \frac{y_1+y_2}{2} = \delta \sin\alpha. \tag{6}$$

Aus diesen Gleichungen für x und y aber folgt:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha, \tag{7}$$

d. h. der Mittelpunkt der Sehne S_1S_2 liegt auf dem Lote, das man vom Kreismittelpunkte aus auf die Sehne fällen kann. Da nun zu parallelen Sehnen dasselbe Lot gehört, so ergiebt sich:

Die Mittelpunkte paralleler Sehnen liegen auf dem Lote, das man vom Kreismittelpunkte aus auf diese Sehnen fällen kann.

Aufg. 1. Bestimme die Lage der Geraden

$$2x - 7y + 1 = 0$$

zu dem Kreise $x^2 + y^2 = 9$ und die Koordinaten der Schnittpunkte.

Aufg. 2. Bestimme aus den Gleichungen $x = \delta \cos\alpha$, $y = \delta \sin\alpha$ den Ort der Mittelpunkte aller Sehnen, die vom Kreismittelpunkte den konstanten Abstand δ besitzen. (Betrachte α als einen zu eliminierenden Parameter, § 29).

Aufg. 3. Leite die sämtlichen Resultate des Textes ab für den Kreis $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ und die Gerade $Ax + By + C = 0$.

Aufg. 4. Bestimme die Lage der Geraden

$$5y - x + 2 = 0$$

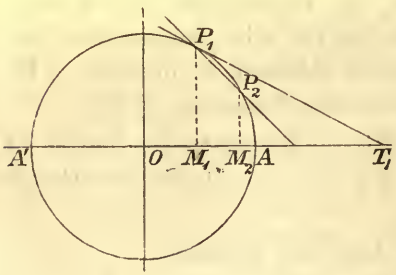
zu dem Kreise $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$ und die Koordinaten der Schnittpunkte.

§ 34. Die Tangente in einem Punkte des Kreises.

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir gesehen, dafs die quadratische Gleichung, die die Abscissen der Schnittpunkte der Geraden $x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta = 0$ mit dem Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ bestimmt, zwei zusammenfallende Wurzeln besitzt, sobald der Abstand δ des Kreismittelpunktes von der Geraden gleich dem Radius r wird. Die Gerade steht in diesem Falle im Endpunkte des Radius $\delta = r$ senkrecht auf diesem und wird dann bekanntlich eine Tangente des Kreises genannt. Um aber eine für alle Kurven gültige Definition der Tangente zu erhalten, gehen wir von folgender Überlegung aus. Durch einen beliebigen Punkt P_1 des Kreises werde eine Sekante gezogen, die den Kreis noch in einem zweiten Punkte P_2 trifft. Nunmehr möge sich die Sekante um den Punkt P_1 in dem Sinne drehen, dafs sich der zweite Schnittpunkt P_2 immer mehr und mehr dem Punkte P_1 nähere. In demselben Momente, in dem die Gerade mit dem Radius OP_1 einen rechten Winkel einschliefst, d. h. zur Tangente wird, fällt der Punkt P_2 mit P_1 zusammen, und umgekehrt.

Sei daher jetzt eine beliebige Kurve gegeben und auf ihr ein Punkt P_1. Durch diesen werde eine Sekante gezogen, die die Kurve noch in einem zweiten Punkte P_2 treffen möge. Dreht sich nun die Sekante um P_1 in dem Sinne, dafs sich P_2 immer mehr dem Punkte P_1 nähert, so nennt man die Gerade in dem Momente, in dem P_2 mit P_1 zusammengefallen ist, die Tangente der Kurve im Punkte P_1.

Fig. 30.



Diese Definition befindet sich also, auf den Kreis angewandt, wie wir oben gesehen haben, durchaus in Übereinstimmung mit der in den Elementen gegebenen Definition der Kreistangente. Zugleich ist damit genau der Weg vorgezeichnet, den man einschlagen mufs, um für einen be-

liebigen Punkt P_1 des Kreises oder überhaupt einer Kurve die Gleichung der Tangente zu erhalten.

Die Punkte P_1 und P_2 des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ mögen durch ihre Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 gegeben sein. Die Gleichung der Sekante P_1P_2 lautet dann (§ 19):

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{1}$$

Da aber P_1 und P_2 auf dem Kreise liegen, so ist:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2, \quad x_2^2 + y_2^2 = r^2,$$

und folglich:

$$x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 = 0,$$

oder:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1},$$

wodurch Gleichung (1) übergeht in:

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1). \tag{2}$$

Um nun von der Gleichung der Sekante zu der Gleichung der Tangente überzugehen, hat man P_2 mit P_1 zusammenfallen zu lassen und demnach $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ zu setzen. Man erhält:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1),$$

oder:

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Da aber P_1 auf dem Kreise liegt, also $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ ist, so erhält man als Gleichung der Tangente des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ im Punkte P_1 die Gleichung:

$$xx_1 + yy_1 = r^2. \tag{3}$$

In dieser Gleichung bedeuten x_1, y_1 die Koordinaten des Berührungspunktes P_1, während x, y, die sogenannten laufenden Koordinaten, einen beliebigen Punkt der Tangente darstellen.

Es möge jetzt der Mittelpunkt des Kreises nicht mit dem Anfangspunkte zusammenfallen, sondern die Koordinaten p, q besitzen. Die Gleichung des Kreises lautet dann:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Um die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) zu erhalten, legen wir durch den Mittelpunkt ein neues Achsen-

system parallel und gleichgerichtet mit dem alten. Die neuen Koordinaten der Punkte, deren alte Koordinaten x, y und x_1, y_1 sind, mögen x', y' und x_1', y_1' heifsen. Die Gleichung der gesuchten Tangente, bezogen auf das neue System, lautet dann infolge (3):

$$x'x_1' + y'y_1' = r^2.$$

Da aber

$$x' = x - p, \quad y' = y - q, \quad x_1' = x_1 - p, \quad y_1' = y_1 - q$$

ist, so findet man:

(4) $$(x-p)(x_1-p) + (y-q)(y_1-q) = r^2,$$

als die Gleichung der Tangente des Kreises

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

im Punkte (x_1, y_1).

Aufg. 1. Gegeben sei der Kreis $x^2 + y^2 = 25$. Zur Abscisse $x = 4$ gehören zwei Kreispunkte; bestimme die Gleichungen der zugehörigen Tangenten und zeige, dafs diese sich in einem Punkte der x-Achse treffen.

Aufg. 2. Bringe die Gleichung $xx_1 + yy_1 = r^2$ auf die Normalform und leite diese (und damit auch die Gleichung $xx_1 + yy_1 = r^2$) an der Hand der Figur direkt ab.

Aufg. 3. Bestimme den Richtungskoeffizienten der Kreistangente $xx_1 + yy_1 = r^2$ und zeige, dafs die Tangente auf dem Radius des Berührungspunktes senkrecht steht.

Aufg. 4. Der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ treffe die x-Achse in den Punkten A und A'. Bestimme den Achsenabschnitt $x = OT_1$ der Tangente des Punktes P_1, dessen Abscisse $x_1 = OM_1$ ist, und schliefse aus der Relation $xx_1 = r^2 = OA^2$, dafs A, A', M_1, T_1 harmonische Punkte sind (§ 4). Wie bewegt sich T_1, wenn M_1 die Strecke AA' durchläuft?

Aufg. 5. Unter welcher Bedingung ist die Gerade

$$Ax + By + C = 0$$

eine Tangente des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$? Zeige, dafs für die Gerade $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ diese Bedingung lautet: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^2}$.

Aufg. 6. Bestimme die Gleichungen der beiden Kreistangenten mit dem vorgeschriebenen Richtungskoeffizienten μ.

Aufg. 7. Welche Beziehung mufs zwischen A, B, C und p, q, r stattfinden, damit die Gerade $Ax + By + C = 0$ den Kreis $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ berühre?

Aufg. 8. Bestimme mit Hülfe dieser Beziehung die Gleichung des Kreises, der dem Dreiecke

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

eingeschrieben ist.

Aufg. 9. Unter welcher Bedingung berührt die Gerade $Ax + By + C = 0$ den Kreis $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$?

§ 35. Tangenten von einem Punkte aufserhalb des Kreises. Berührungssehne, Pol und Polare.

Von einem beliebigen Punkte (x_0, y_0) aus werde an den Kreis

(1) $$x^2 + y^2 = r^2$$

eine Tangente gelegt. Bezeichnet man die Koordinaten des Berührungspunktes mit x_1, y_1, so lautet die Gleichung der Tangente:

$$xx_1 + yy_1 = r^2,$$

und da diese durch (x_0, y_0) hindurchgehen soll, so hat man:

(2) $$x_0x_1 + y_0y_1 = r^2.$$

Hierdurch wird aber zugleich auch ausgesprochen, dafs der Berührungspunkt (x_1, y_1) einer von dem Punkte (x_0, y_0) an den Kreis gezogenen Tangente auf der Geraden

(3) $$xx_0 + yy_0 = r^2$$

liegen mufs.

Diese Gerade trifft den Kreis $x^2+y^2=r^2$ in zwei Punkten (§ 33), deren Koordinaten aus (1) und (3) berechnet werden können. Umgekehrt ist leicht einzusehen, dafs die Tangente in jedem dieser beiden Punkte durch (x_0, y_0) hindurchgeht. Denn bezeichnet man einen dieser Punkte mit x', y', so ist $x'x_0 + y'y_0 = r^2$. Diese Gleichung läfst sich aber auch so deuten, dafs sie aussagt, der Punkt (x_0, y_0) liege auf der zu (x', y') gehörigen Tangente $xx' + yy' = r^2$.

Zu jedem Punkte (x_0, y_0) der Ebene ergiebt sich also eine ganz bestimmte zugehörige Gerade:

$$xx_0 + yy_0 = r^2. \tag{4}$$

Sie wird die Polare des Punktes (x_0, y_0) in Bezug auf den gegebenen Kreis, und umgekehrt der Punkt (x_0, y_0) der Pol der Geraden $xx_0 + yy_0 = r^2$ genannt.

Die Polare des Punktes (x_0, y_0) schneidet nach dem Obigen aus dem Kreise die Berührungspunkte der von (x_0, y_0) an den Kreis konstruierbaren Tangenten aus und heifst daher auch die Berührungssehne des Punktes (x_0, y_0). Da der Abstand dieser Polaren vom Mittelpunkte gleich $\frac{r^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$ ist (§ 22), so erhält man zwei reelle und von einander verschiedene, zwei reelle aber zusammenfallende, oder gar keine Schnittpunkte, je nachdem (x_0, y_0) aufserhalb, auf dem Umfange, oder innerhalb des Kreises liegt. Im ersten Falle kann man von (x_0, y_0) aus zwei von einander verschiedene Tangenten an den Kreis legen, im zweiten Falle erhält man eine einzige, mit der Berührungssehne zusammenfallende Tangente, im dritten Falle gar keine reellen Tangenten.

Aufg. 1. Die Berührungspunkte der Tangenten zu finden, die man von $(5, -3)$ an den Kreis $x^2 + y^2 = 16$ legen kann.

Aufg. 2. Finde durch Vergleichen mit $xx_0 + yy_0 = r^2$ den Pol der Geraden $Ax + By + C = 0$ in Bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$.

Aufg. 3. Bestimme die Polare des Punktes (x_0, y_0) und den Pol der Geraden $Ax + By + C = 0$ in Bezug auf den Kreis $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

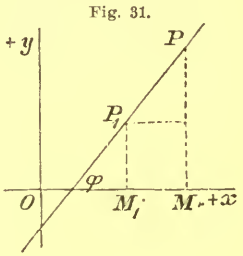
Aufg. 4. Löse dieselbe Aufgabe für den Kreis

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0.$$

Aufg. 5. Statt, wie im Texte angegeben, die Berührungspunkte aus (1) und (3) zu ermitteln, kann man (1) auch mit der Gleichung kombinieren, die sich ergiebt, wenn man (3) von (1) subtrahiert. Was stellt diese Gleichung dar? Die Interpretation führt zu der bekannten geometrischen Konstruktion der Berührungspunkte.

§ 36. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis.

Zieht man durch einen beliebigen Punkt P_1, mit den Koordinaten x_1, y_1, eine unter dem Winkel φ gegen die x-Achse geneigte Gerade, so kann man die Koordinaten x, y eines jeden Punktes P der Geraden durch



(1) $x = x_1 + \varrho \cos\varphi, \quad y = y_1 + \varrho \sin\varphi$

ausdrücken, insofern $P_1 P = \varrho$ gesetzt wird; denn man hat

$$\cos\varphi = \frac{x - x_1}{\varrho}, \quad \sin\varphi = \frac{y - y_1}{\varrho} \text{ (§ 7 u. 8).}$$

Indem man dem veränderlichen Parameter ϱ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ beilegt, erhält man aus (1) alle Punkte der unendlichen Geraden. (Durch Elimination des Parameters ϱ würde man auf die bekannte Gleichung $y - y_1 = \operatorname{tg}\varphi \cdot (x - x_1)$ der Geraden geführt werden.)

Sei jetzt ein beliebiger Kreis, mit dem Radius r, und ein beliebiger Punkt P_1 gegeben. Der Einfachheit halber wählen wir den Mittelpunkt des Kreises zum Anfangspunkte, sodafs die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ lautet.

Durch P_1 werde unter dem Winkel φ eine Gerade gezogen, deren Punkte durch (1) bestimmt sind. Soll nun ein beliebiger Punkt P dieser Geraden zugleich auf dem Kreise liegen, so mufs sein:

$$(x_1 + \varrho \cos\varphi)^2 + (y_1 + \varrho \sin\varphi)^2 = r^2,$$

oder:

(2) $$\varrho^2 + 2\varrho\,(x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi) + x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0.$$

Diese in ϱ quadratische Gleichung liefert die beiden Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreise (§ 33).

Da aber das Produkt der beiden Wurzeln, nämlich:

(3) $$\varrho' \varrho'' = x_1^2 + y_1^2 - r^2,$$

nur von der Lage des Punktes P_1, nicht aber auch von φ, also nicht von der Richtung der durch P_1 gehenden Geraden abhängig ist, so folgt:

Zieht man von einem beliebigen Punkte Strahlen nach einem Kreise, von denen jeder den Kreis in zwei

zusammengehörigen Punkten trifft, so ist das Produkt der Entfernungen zweier zusammengehöriger Schnittpunkte von dem gegebenen Punkte für alle Strahlen konstant.

Dieses konstante Produkt wird die Potenz des Punktes P_1 in Bezug auf den gegebenen Kreis genannt. Der Ausdruck $x_1^2 + y_1^2 - r^2$ zeigt, dafs die Potenz für einen Punkt aufserhalb des Kreises positiv, für einen Punkt auf dem Kreise Null, für einen Punkt innerhalb des Kreises negativ ist.

Dreht man, unter der Voraussetzung, dafs P_1 aufserhalb des Kreises liegt, den durch P_1 gehenden Strahl, bis er den Kreis berührt, so ergiebt sich, dafs die Potenz von P_1 gleich dem Quadrate der durch P_1 gehenden Tangente ist.

Aufg. 1. Man überzeuge sich, dafs die auf die Potenz bezüglichen Untersuchungen unabhängig von dem nur zur Ableitung eingeführten Koordinatensysteme sind.

Aufg. 2. Welches ist der Ort der Punkte, die in Bezug auf einen gegebenen Kreis dieselbe Potenz haben?

Aufg. 3. Welche Werte nimmt die Potenz eines Punktes an, der eine durch den Mittelpunkt des Kreises gehende unendliche Gerade durchläuft?

§ 37. Systeme von Kreisen. Potenzlinie.

So lange wir es nur mit einem Kreise zu thun haben, können wir der Einfachheit halber den Mittelpunkt als Anfangspunkt der Koordinaten betrachten und erhalten dann als Potenz des Punktes (x_1, y_1) den Ausdruck $x_1^2 + y_1^2 - r^2$.

Hat aber der Mittelpunkt die Koordinaten p, q, so lehrt eine einfache Parallelverschiebung der Achsen, dafs die Potenz des Punktes (x_1, y_1) in Bezug auf den Kreis

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 - r^2 = 0$$

gleich

$$(x_1-p)^2 + (y_1-q)^2 - r^2$$

ist.

Dies vorausgeschickt, seien jetzt

$$(1) \qquad (x-p_1)^2 + (y-q_1)^2 - r_1^2 = 0,$$

$$(2) \qquad (x-p_2)^2 + (y-q_2)^2 - r_2^2 = 0$$

die Gleichungen zweier Kreise. Versteht man unter (x, y) einen ganz beliebigen Punkt, so stellt die linke Seite z. B. der Gleichung (1) die Potenz des Punktes (x, y) in Bezug auf den ersten Kreis dar; sie ist also positiv, wenn (x, y) aufserhalb, Null, wenn (x, y) auf der Peripherie, und negativ, wenn (x, y) innerhalb des ersten Kreises liegt. Analoges gilt für den zweiten Kreis. Bezeichnen wir daher zur Abkürzung die linken Seiten von (1) und (2) mit K_1 und K_2, so bedeuten K_1 und K_2 die Potenzen von (x, y) in Bezug auf die beiden Kreise. Soll der Punkt (x, y) so liegen, dafs diese beiden Potenzen einander gleich sind, so hat man nur $K_1 = K_2$ oder $K_1 - K_2 = 0$ zu setzen. Rechnet man aber aus, so fallen x^2 und y^2 weg, und man erhält:

$$(3) \qquad 2x(p_2 - p_1) + 2y(q_2 - q_1) + p_1^2 + q_1^2 - r_1^2 - (p_2^2 + q_2^2 - r_2^2) = 0,$$

als Gleichung des Ortes der Punkte, die in Bezug auf die Kreise $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ gleiche Potenzen haben.

Diese Gleichung stellt aber, weil in Bezug auf x und y linear, eine gerade Linie dar. Man nennt sie die Potenzlinie (Chordale, Radikalachse) der beiden Kreise.

Wir ziehen es vor, für die Gleichung der Potenzlinie die Form $K_1 - K_2 = 0$ beizubehalten, und erkennen daraus unmittelbar, dafs ein Punkt (x, y), der den beiden Kreisen gemeinschaftlich ist, auch auf der Potenzlinie liegen mufs, da ja für einen solchen die Ausdrücke K_1 und K_2 einzeln verschwinden. Aus dem gleichen Grunde mufs jeder Schnittpunkt der Potenzlinie mit dem einen Kreise auch auf dem andern Kreise liegen; denn wenn für einen Punkt (x, y) zugleich $K_1 - K_2$ und etwa K_1 verschwinden, so mufs für denselben Punkt auch K_2 gleich Null sein. Man erhält daher die Schnittpunkte zweier Kreise als die Schnittpunkte der Potenzlinie mit dem einen von ihnen. Zwei Kreise schneiden sich demnach entweder in zwei reellen und von einander verschiedenen Punkten — dann ist die Potenzlinie die gemeinschaftliche Sekante —, oder in zwei reellen, aber zusammenfallenden Punkten, d. h. sie berühren sich — dann ist die Potenzlinie die gemeinschaftliche Tangente —, oder endlich sie schneiden sich gar

nicht — dann hat auch die Potenzlinie mit keinem der Kreise einen Punkt gemein.

Aus der Gleichung (3) der Potenzlinie erkennt man, dafs diese auf der Verbindungslinie

$$x(q_2 - q_1) - y(p_2 - p_1) + p_2 q_1 - p_1 q_2 = 0$$

der beiden Kreismittelpunkte senkrecht steht (§ 24), wie auch aus Symmetriegründen evident ist.

Berücksichtigt man endlich, dafs für einen aufserhalb eines Kreises befindlichen Punkt die Potenz gleich dem Quadrate der durch den Punkt gehenden Kreistangente ist, so folgt:

I. Der Ort der Punkte, von denen aus man an zwei gegebene Kreise gleiche Tangenten legen kann, ist eine Gerade, nämlich die Potenzlinie der beiden Kreise.

Wir kombinieren jetzt mit den beiden Kreisen (1) und (2) einen dritten Kreis, dessen Gleichung

$$(4) \qquad (x - p_3)^2 + (y - q_3)^2 - r_3^2 = 0,$$

oder abgekürzt $K_3 = 0$ sei.

Diese drei Kreise, zu je zweien kombiniert, geben zu drei Potenzlinien Veranlassung, deren Gleichungen wir abgekürzt schreiben:

$$K_2 - K_3 = 0,$$
$$K_3 - K_1 = 0,$$
$$K_1 - K_2 = 0.$$

Da aber durch Addition der Gleichungen die linke Seite identisch verschwindet, so folgt (§ 25):

II. Die drei Potenzlinien, die man zu je zweien von drei Kreisen konstruieren kann, schneiden sich in einem Punkte. Man nennt ihn den Potenzpunkt (Chordalpunkt, Radikalzentrum) der drei Kreise.

Aufg. 1. Was wird aus Gleichung (3) der Potenzlinie zweier Kreise, wenn diese konzentrisch sind oder wenn der eine sich auf einen Punkt reduziert?

Aufg. 2. Wenn zwei Kreise sich rechtwinklig schneiden, so ist die von dem Mittelpunkte eines jeden der beiden Kreise an den andern gelegte Tangente gleich dem zugehörigen Radius. Unter welcher Bedingung durchschneiden sich demnach zwei durch ihre Gleichungen gegebene Kreise rechtwinklig?

Aufg. 3. Wie heifst die Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt $(3, -4)$ ist und der den Kreis

$$(x-5)^2 + (y-6)^2 = 9$$

rechtwinklig schneidet? Konstruiere den Kreis.

Aufg. 4. Finde die Schnittpunkte der beiden vorhergehenden Kreise mit Hülfe der Potenzlinie.

Aufg. 5. Die Kreise $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ mögen keinen Punkt mit einander gemein haben. Konstruiere ihre Potenzlinie mit Hülfe eines Kreises $K_3 = 0$, der $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ schneidet, durch Anwendung des Satzes II.

Aufg. 6. Welche Beziehung mufs zwischen p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2 stattfinden, damit die beiden zugehörigen Kreise sich berühren?

Aufg. 7. Stelle die Gleichungen auf, aus denen man die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius eines Kreises zu berechnen hat, der durch zwei gegebene Punkte (x_1, y_1); (x_2, y_2) hindurchgeht und den Kreis

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

berührt. Ohne die Gleichungen aufzulösen, überzeuge man sich, dafs zwei Lösungen existieren.

Aufg. 8. Man löse die vorhergehende Aufgabe durch Konstruktion, indem man durch die gegebenen Punkte P_1 und P_2 einen Kreis legt, der den gegebenen Kreis in zwei Punkten schneidet. Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte und die Linie P_1P_2 sind die Potenzlinien, die der Hülfskreis mit dem gegebenen und dem gesuchten Kreise bestimmt. Die von dem Schnittpunkte dieser Potenzlinien an den gegebenen Kreis gelegten Tangenten führen dann zu den beiden Lösungen.

Aufg. 9. Beweise, dafs der Ort des Punktes, dessen Potenzen in Bezug auf zwei Kreise $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ in dem

konstanten Verhältnisse $\lambda : 1$ zu einander stehen, der Kreis $K_1 - \lambda K_2 = 0$ ist, der durch die Schnittpunkte von $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ geht. Welchen Spezialfall erhält man für $\lambda = 1$?

Aufg. 10. Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises $K_1 - \lambda K_2 = 0$ und diskutiere das Resultat.

Aufg. 11. Aus Aufg. 2 ergiebt sich, dafs die Bedingung dafür, dafs sich die beiden Kreise

$$x^2 + y^2 + bx + cy + d = 0$$

und

$$x^2 + y^2 + b_1 x + c_1 y + d_1 = 0$$

rechtwinklig schneiden,

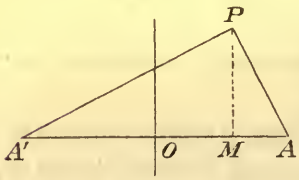
$$bb_1 + cc_1 = 2(d + d_1)$$

lautet. Man kann daher stets einen Kreis konstruieren, der drei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet. Bestimme seine Gleichung und zeige, dafs sein Mittelpunkt das Radikalzentrum der drei gegebenen Kreise ist.

§ 38. Vermischte Aufgaben über den Kreis.

Aufg. 1. Den Ort der Punkte zu finden, für die die Summe der Quadrate der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Fig. 32.



Die Verbindungslinie der gegebenen Punkte A und A', deren Entfernung $= 2c$ sei, werde zur x-Achse, ihre Mitte zum Anfangspunkte gewählt. Die Entfernungen des Punktes P, dessen Ort zu suchen ist, seien r und r', und es sei ferner $r^2 + r'^2 = d^2$. Nun folgt aus

$$r^2 = (c - x)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad r'^2 = (c + x)^2 + y^2$$

die Gleichung:

$$r^2 + r'^2 = 2c^2 + 2x^2 + 2y^2 = d^2,$$

oder:

$$x^2 + y^2 = \frac{d^2}{2} - c^2.$$

Der Ort ist also, so lange $d^2 > 2c^2$ ist, ein Kreis mit O als Mittelpunkte.

Aufg. 2. Den Ort des Punktes zu finden, für den das Verhältnis der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Wir wählen die Verbindungslinie der gegebenen Punkte A und B, deren Entfernung $= c$ sei, zur x-Achse und A zum Anfangspunkte. Ist dann $\frac{PA}{PB} = \varkappa$, so folgt aus

$$PA^2 = x^2 + y^2, \quad PB^2 = (c - x)^2 + y^2$$

die Gleichung:

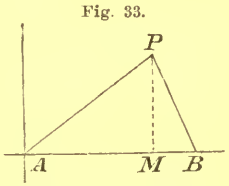


Fig. 33.

$$\frac{x^2 + y^2}{(c - x)^2 + y^2} = \varkappa^2,$$

oder:

$$x^2(1 - \varkappa^2) + y^2(1 - \varkappa^2) + 2c\varkappa^2 x - c^2\varkappa^2 = 0.$$

Dies ist aber die Gleichung eines Kreises. Bestimme seinen Mittelpunkt und seinen Radius. Zeige, dafs der Kreis die x-Achse in zwei Punkten trifft, die die Strecke AB harmonisch teilen (§ 4, Aufg. 4).

Aufg. 3. Von einem Dreiecke kennt man die Basis $AB = c$ und den gegenüberliegenden Winkel γ. Man suche den Ort der Spitze C des Dreiecks.

Bezeichnet man die Winkel bei A und B mit α und β und wählt die Mitte von AB zum Anfangspunkte, AB selbst zur x-Achse, so erhält man, unter x, y die Koordinaten der Spitze C verstanden, die Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{\frac{c}{2} + x}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{y}{\frac{c}{2} - x}, \quad \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

Setzt man aber in $\operatorname{tg}\gamma = -\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ die Werte von $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\beta$ ein, so erhält man nach leichter Reduktion:

$$x^2 + y^2 - c \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot y - \frac{c^2}{4} = 0,$$

als Gleichung eines durch A und B gehenden Kreises. Bestimme den Mittelpunkt und den Radius und zeige die Übereinstimmung mit der bekannten planimetrischen Lösung der Aufgabe.

Aufg. 4. Von einem Dreiecke kennt man die Basis $AB = c$ und den gegenüberliegenden Winkel γ. Man suche den Ort des Schnittpunktes der drei Höhen.

Behält man die Dispositionen und Bezeichnungen der vorhergehenden Aufgabe bei und nennt die Winkel, die die zu A und B gehörigen Höhen mit AB einschliefsen, α' und β', so findet man leicht $\alpha' + \beta' = \gamma$ und sodann, wie früher:

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{y}{\frac{c}{2} + x}, \quad \operatorname{tg}\beta' = \frac{y}{\frac{c}{2} - x}.$$

Daraus ergiebt sich aber durch fast dieselbe Rechnung:

$$x^2 + y^2 + c \cdot \operatorname{ctg}\gamma \cdot y - \frac{c^2}{4} = 0,$$

d. h. der gesuchte Ort ist der Kreis, der in Bezug auf AB zu dem in Aufg. 3 gefundenen Kreise symmetrisch liegt.

Aufg. 5. Von einem Punkte P_0 mit den Koordinaten x_0, y_0 werden Strahlen nach allen Punkten P des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ gezogen, und jedesmal werde die Strecke P_0P durch einen Punkt R in dem konstanten Teilverhältnisse $\frac{P_0R}{RP} = \lambda$ geteilt. Welches ist der Ort der Teilpunkte R?

Bezeichnet man mit α die Anomalie eines beliebigen Kreispunktes P, so sind seine Koordinaten $r\cos\alpha$, $r\sin\alpha$, und demnach die Koordinaten von R (§ 9) gleich:

$$x = \frac{x_0 + \lambda r\cos\alpha}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_0 + \lambda r\sin\alpha}{1+\lambda}.$$

Um die Gleichung des Ortes zu erhalten, eliminieren wir den Parameter α (§ 29), indem wir nach $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ auflösen. Durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{(1+\lambda)x - x_0}{\lambda r}, \quad \sin\alpha = \frac{(1+\lambda)y - y_0}{\lambda r}$$

erhält man aber:

$$\left(x - \frac{x_0}{1+\lambda}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0}{1+\lambda}\right)^2 = \frac{\lambda^2 r^2}{(1+\lambda)^2}.$$

In welcher Beziehung steht dieser Kreis nach Lage und Dimension zu dem gegebenen?

Viertes Kapitel.

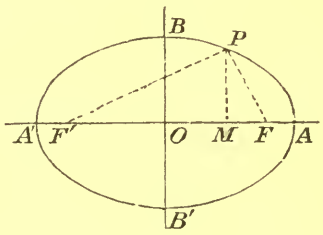
Die Ellipse.

§ 39. Definition und Gleichung der Ellipse.

Die Ellipse ist der Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Die beiden festen Punkte F und F' nennt man die Brennpunkte, ihren halben Abstand die Exzentrizität der Ellipse. Die von irgend einem Punkte P der Ellipse nach den Brennpunkten gezogenen Strahlen heifsen Brennstrahlen.

Fig. 34.



Aus der Definition ergiebt sich die folgende mechanische Erzeugungsweise der Ellipse. Befestigt man in den beiden Brennpunkten F und F' die Enden eines Fadens, dessen Länge gröfser als FF' ist, und führt einen Stift so, dafs er den Faden fortwährend gespannt erhält, so beschreibt der Stift eine Ellipse. Aus dieser Entstehungsweise erkennt man, wie auch aus der Definition, dafs die Ellipse eine geschlossene Linie ist.

Um ihre Gleichung abzuleiten, wählen wir FF' als x-Achse und den Mittelpunkt von FF' als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Achsensystemes. Es sei

$$FF' = 2c, \quad PF = r, \quad PF' = r'$$

und die konstante Summe der beiden Brennstrahlen r und r' gleich $2a$. Dann mufs $r + r' > 2c$, folglich $a > c$ sein. Nun ist

$$r = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}, \quad r' = \sqrt{(c+x)^2 + y^2};$$

man erhält daher als Gleichung der Ellipse:

$$(1) \qquad \sqrt{(c-x)^2 + y^2} + \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 2a.$$

Um die Gleichung von den Wurzeln zu befreien, quadriere man, wodurch sich zunächst ergiebt:

$$2(x^2 + y^2 + c^2) + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} = 4a^2.$$

Durch nochmaliges Quadrieren erhält man:

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = ((x^2 + y^2 + c^2) - 2a^2)^2$$

und hieraus durch Ausrechnen:

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0.$$

Da $a > c$ ist, so kann man zur Abkürzung

$$a^2 - c^2 = b^2 \tag{2}$$

setzen und erhält dann, nach Division mit a^2b^2, die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Dieser Gleichung genügen alle Punkte, für die

$$r + r' = 2a$$

ist, d. h. alle Punkte der Ellipse. Dafs aber auch nur diese Punkte die Gleichung (3) befriedigen, erkennt man so:

Verbindet man einen beliebigen Punkt Q der Ebene mit dem Anfangspunkte O, so mufs der Strahl OQ die Ellipse, da diese eine geschlossene Kurve ist, in einem Punkte P schneiden. Die Koordinaten von Q seien x_0, y_0, die von P mögen x, y heifsen. Dann ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Liegt nun Q näher bei O als P, so hat man $x_0 < x$, $y_0 < y$ und folglich $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$. Liegt dagegen Q auf der Verlängerung von P, so ist $x_0 > x$, $y_0 > y$ und folglich $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1$.

Die Gleichung (3) wird also allemal, aber auch nur dann, erfüllt, wenn (x, y) einen Punkt der Ellipse bedeutet. Sie heifst daher die Gleichung der Ellipse.

§ 40. Diskussion der Gleichung der Ellipse.

Sei (x, y) ein Punkt der Ellipse, also

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Da diese Gleichung nur die Quadrate von x und y enthält, so wird sie auch von den Koordinaten des Punktes $(-x, -y)$ befriedigt. Die Verbindungslinie von (x, y) und $(-x, -y)$ geht durch den Anfangspunkt und wird in ihm halbiert.

Um umgekehrt die Schnittpunkte einer beliebigen, durch O gehenden Geraden $y = \mu x$ mit der Ellipse zu bestimmen, hat man nur in (1) μx an die Stelle von y zu setzen und nach x aufzulösen. Man erhält dann für die Abscissen der Schnittpunkte die beiden entgegengesetzt gleichen Werte $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2\mu^2}}$ und folglich für die zugehörigen Ordinaten die Werte $y = \pm \frac{\mu ab}{\sqrt{b^2 + a^2\mu^2}}$. Jede durch O gehende Gerade trifft also die Ellipse in zwei zu O symmetrisch gelegenen Punkten.

O heifst daher der Mittelpunkt der Ellipse, jede durch ihn hindurchgehende Sehne ein Durchmesser.

Die Ellipse liegt aber auch symmetrisch zu den Koordinatenachsen, denn wenn (x, y) ein Punkt der Ellipse ist, so sind es auch die Punkte $(-x, y)$ und $(x, -y)$. Die Ellipse wird also durch die Achsen in vier kongruente Quadranten geteilt.

Aus der nach y aufgelösten Gleichung der Ellipse

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{2}$$

erkennt man, dafs y nur für Werte von x zwischen $-a$ und $+a$ reelle Werte besitzt. Für $x = +a$ wird $y = 0$, für $x = 0$ folgt $y = \pm b$. Die Ellipse schneidet somit die x-Achse in zwei Punkten A, A', die Ordinatenachse in zwei Punkten B, B', deren Entfernungen $AA' = 2a$, $BB' = 2b$ sind. AA' nennt man die grofse, BB' die kleine Achse, beide zusammen die Hauptachsen und ihre Endpunkte die Scheitel der Ellipse.

Für $x = c$ erhält man die beiden entgegengesetzt gleichen, zum Brennpunkte F gehörigen Ordinaten $y = +\frac{b^2}{a}$. Man schreibt zur Abkürzung

$$\frac{b^2}{a} = p \tag{3}$$

und nennt p den Halbparameter der Ellipse.

Ist $b = a$, so ist $c = 0$. Die Ellipse geht dann, wie aus (1) oder (2) folgt, in einen Kreis mit dem Radius a über. Der Kreis ist also eine spezielle Ellipse, deren Brennpunkte im Mittelpunkte vereinigt und deren Hauptachsen einander gleich sind.

Aufg. 1. Verbinde die Scheitel B, B' der kleinen Achse mit den Brennpunkten F, F' und beweise, dafs dadurch ein Rhombus entsteht, dessen Seiten gleich a sind.

Aufg. 2. Finde die Brennpunkte der Ellipse, deren Halbachsen $a = 5$, $b = 3$ sind.

Aufg. 3. Wie grofs ist die Exzentrizität c der Ellipse

$$\frac{x^2}{26} + \frac{y^2}{19} = 1?$$

Aufg. 4. Wie heifst die Gleichung der Ellipse, deren kleine Halbachse $b = 3$ und deren Halbparameter $p = 1$ ist?

Aufg. 5. Bestimme die Schnittpunkte der Ellipse

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

mit den Winkelhalbierenden der Achsen.

Aufg. 6. Bestimme die Endpunkte der durch $y = \mu x$ und $y = -\mu x$ dargestellten Durchmesser der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und diskutiere das Resultat.

Aufg. 7. Untersuche, ob die Punkte $(1; -3)$; $(-4; 1)$; $(3; 2, 4)$ innerhalb, auf, oder aufserhalb der durch $a = 5$, $b = 3$ charakterisierten Ellipse liegen.

Aufg. 8. Bestimme die Halbachsen einer Ellipse, von der man die Brennpunkte und den Halbparameter kennt.

Aufg. 9. Berechne und konstruiere aus je zweien der vier Gröfsen a, b, c, p die beiden andern. Zeige insbesondere, in welcher Weise b bei wachsendem a und gleichbleibendem p wächst.

Aufg. 10. Ein Stab von konstanter Länge gleite in einem rechtwinkligen Achsenkreuze so, dafs stets seine Endpunkte auf den beiden Achsen ruhen. Zeige, dafs jeder seiner Punkte eine Ellipse beschreibt.

Aufg. 11. Es sei eine Ellipse mit den Halbachsen a und b gegeben. Bestimme, von dem Scheitel A ausgehend, die Ecken des eingeschriebenen gleichseitigen Sechsecks. Man findet für die Abscissen der Ecken die Werte $x = \pm a$ und $x = + a \frac{a^2 + b^2}{3a^2 + b^2}$.

§ 41. Polargleichung der Ellipse, bezogen auf den Mittelpunkt.

Ein beliebiger Punkt P der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

habe die rechtwinkligen Koordinaten x, y und die Polarkoordinaten r, u. Dann ist:

$$x = r\cos u, \quad y = r\sin u. \tag{2}$$

Führt man diese Werte in (1) ein, so kommt:

$$\frac{r^2\cos^2 u}{a^2} + \frac{r^2\sin^2 u}{b^2} = 1,$$

oder:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 u}{a^2} + \frac{\sin^2 u}{b^2}. \tag{3}$$

Dies ist die auf den Mittelpunkt bezogene Polargleichung der Ellipse. Sie läfst sich auch in der Form schreiben:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}. \tag{4}$$

Berücksichtigt man $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$ und ferner $a^2 - b^2 = c^2$, so erhält man hieraus:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - c^2\cos^2 u}. \tag{5}$$

Man bedient sich der Bezeichnung:

$$\frac{c}{a} = \varepsilon \quad (\varepsilon < 1) \tag{6}$$

und nennt ε die numerische Exzentrizität, während c, im Gegensatze hierzu, auch die lineare Exzentrizität genannt wird. Mit Hülfe dieser neuen Bezeichnung geht (5) über in:

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2\cos^2 u}. \tag{7}$$

Aus (5) erkennt man, dafs r für $u = 0$ seinen gröfsten Wert, nämlich a, erhält. Durchläuft u den ersten Quadranten, so nimmt r stetig ab und erreicht für $u = 90^0$ seinen kleinsten Wert, nämlich b.

Daraus ergiebt sich, dafs der um den Mittelpunkt O mit dem Radius a beschriebene Kreis, der die Ellipse in den Scheiteln A und A' der grofsen Achse berührt, der Ellipse umgeschrieben ist, während der konzentrische Kreis mit

dem Radius b, der die Ellipse in den Scheiteln B und B' der kleinen Achse berührt, der Ellipse eingeschrieben ist.

Gleichung (3) führt noch zu einem bemerkenswerten Satze. Konstruiert man nämlich zu dem Halbmesser $OP = r$ den dazu senkrechten $OP' = r'$, dessen Anomalie $u' = 90^0 + u$ ist, so hat man zunächst:

$$\frac{1}{r'^2} = \frac{\cos^2 u'}{a^2} + \frac{\sin^2 u'}{b^2}. \tag{8}$$

Da aber $\cos u' = -\sin u$, $\sin u' = \cos u$ ist, so erhält man durch Addition von (3) und (8):

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \tag{9}$$

d. h.: Die Summe der reziproken Quadrate zweier auf einander senkrecht stehender Halbmesser ist konstant.

Aufg. 1. Bestimme die Länge der beiden Halbmesser, die die Achsenwinkel der Ellipse $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ halbieren.

Aufg. 2. Bestimme für dieselbe Ellipse die Summe der reziproken Quadrate der zu den Geraden $7x + 4y - 1 = 0$ und $4x - 7y + 3 = 0$ parallelen Halbmesser und verifiziere Gleichung (9).

Aufg. 3. Berechne für dieselbe Ellipse die numerische Exzentrizität und gieb die Polargleichung der Ellipse in den verschiedenen Formen an.

Aufg. 4. Beweise aus Gleichung (3), dafs der Anfangspunkt jede durch ihn gehende Gerade halbiert, also der Mittelpunkt der Ellipse ist. Beweise ferner, dafs zu den Achsen symmetrische Durchmesser einander gleich sind.

Aufg. 5. Es seien zwei Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$$

gegeben, die dieselbe numerische Exzentrizität ε besitzen. Beweise, dafs nicht nur $a : a_1 = b : b_1$ ist, sondern dafs auch für je zwei Halbstrahlen r und r_1, die zu derselben Anomalie u gehören, $r : r_1 = a : a_1$ ist. Die beiden Ellipsen sind ähnlich und ähnlich gelegen. Die Gleichheit der numerischen Exzentrizität zweier Ellipsen ist die notwendige und hinreichende Bedingung für ihre Ähnlichkeit.

Aufg. 6. Beweise die Gleichungen

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad c = \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2},$$

insofern p den Halbparameter bedeutet.

Aufg. 7. Drücke b, c, p durch a und ε aus.

Aufg. 8. Für die Bahn des Merkur ist $\varepsilon = 0,2$. Konstruiere eine Ellipse, die der Merkurbahn ähnlich ist (Aufg. 5).

Aufg. 9. Die Entfernung der Erde von der Sonne in Sonnennähe verhält sich zu der in Sonnenferne wie 29 : 30. Berechne daraus das ε der Erdbahn.

Aufg. 10. Welchen Wert hat ε, wenn $c = b$ ist?

Aufg. 11. Welchen Wert hat ε für den Kreis?

§ 42. Konstruktion der Ellipse mittels des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Kreises.

Die Gleichung des der Ellipse

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{1}$$

umgeschriebenen Kreises lautet:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}. \tag{2}$$

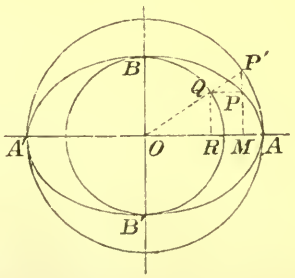
Bezeichnet man die zu derselben Abscisse $OM = x$ gehörigen Ordinaten MP' und MP des umgeschriebenen Kreises und der Ellipse mit y' und y, so folgt aus (1) und (2):

$$y = \frac{b}{a}\, y', \tag{3}$$

d. h.:

Man erhält die Ellipse mit den Halbachsen a und b, indem man die Ordinaten des mit dem Radius a beschriebenen Kreises mit dem konstanten Verhältnisse $b : a$ multipliziert. Mit andern Worten:

Fig. 35.



Die Ellipse und der ihr umgeschriebene Kreis sind in Bezug auf die grofse Achse, als Affinitätsachse, zu einander affin, und das Affinitätsverhältnis, das von dem Kreise zu der Ellipse führt, ist gleich $b : a$.

Löst man die Gleichung der Ellipse und des ihr eingeschriebenen Kreises nach x auf, so ergiebt sich in gleicher Weise:

Die Ellipse und der ihr eingeschriebene Kreis sind in Bezug auf die kleine Achse, als Affinitätsachse, zu einander affin, und das Affinitätsverhältnis, das von dem Kreise zu der Ellipse führt, ist gleich $a:b$.

Um nun die Ellipse mit den Halbachsen a und b zu konstruieren, zeichne man die beiden konzentrischen Kreise mit den Radien a und b und ziehe durch den Mittelpunkt einen beliebigen Strahl OQP'. Zieht man dann durch den Schnittpunkt Q dieses Strahles mit dem kleineren Kreise eine Parallele zur x-Achse und durch den Schnittpunkt P' des Strahles mit dem gröfseren Kreise eine Parallele zur y-Achse, so ist der Schnittpunkt P der beiden Parallelen ein Punkt der Ellipse, denn man hat:

$$MP : MP' = RQ : MP' = OQ : OP',$$

d. h.:

$$y : y' = b : a.$$

Aufg. 1. Zeichne in einem Kreise ein beliebiges System paralleler Sehnen und verkürze jede von ihrem Mittelpunkte aus nach beiden Seiten stets in demselben Verhältnisse. Welches ist der Ort der Endpunkte?

Aufg. 2. Zeichne die Ellipse mit den Halbachsen $a = 5$, $b = 3$.

§ 43. Konjugierte Durchmesser.

Die in dem vorhergehenden Paragraphen besprochene Affinität zwischen der Ellipse und dem ihr umgeschriebenen oder eingeschriebenen Kreise liefert sofort zu jeder Eigenschaft des Kreises eine entsprechende der Ellipse. Bei dem Kreise liegen beispielsweise die Mittelpunkte paralleler Sehnen auf einem Durchmesser. Da nun einer Kreissehne $P'Q'$ — wir wollen, um die Vorstellungen zu fixieren, fortan nur den umgeschriebenen Kreis ins Auge fassen, obwohl der eingeschriebene natürlich ganz die gleichen Dienste leistet, — in dem affinen Systeme wiederum eine geradlinige Strecke entspricht, deren Endpunkte P, Q die den Kreispunkten P', Q'

entsprechenden Ellipsenpunkte sind, und die sich daher als eine Ellipsensehne darstellt, so entsprechen den parallelen Kreissehnen parallele Ellipsensehnen und den Mittelpunkten jener die Mittelpunkte dieser. Da aber jene auf einem Kreisdurchmesser liegen, so müssen sich diese auf der entsprechenden geradlinigen Strecke, d. h. auf einem Ellipsendurchmesser befinden (§ 27). Es gilt daher der Satz:

I. Die Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Ellipse liegen auf einem Durchmesser.

Da ferner der Kreis in Bezug auf jedes der unendlich vielen Paare zu einander senkrecht stehender Durchmesser in dem Sinne symmetrisch ist, dafs jeder der beiden Durchmesser eines solchen Paares die Sehnen halbiert, die dem andern parallel sind, so erhält man für die Ellipse durch zweimalige Anwendung von I den Satz:

II. Es giebt unendlich viele Paare von Durchmessern, in Bezug auf die die Ellipse in dem Sinne symmetrisch ist, dafs jeder der beiden Durchmesser eines solchen Paares die Sehnen halbiert, die dem andern parallel sind. Man erhält irgend eines dieser Paare, indem man zu einem beliebigen Paare auf einander senkrecht stehender Durchmesser des umgeschriebenen Kreises die entsprechenden Ellipsendurchmesser konstruiert.

Je zwei in dieser Weise zu einem Paare verbundene Durchmesser heifsen konjugierte Durchmesser der Ellipse. Von zwei konjugierten Durchmessern kann man stets einen willkürlich wählen. Den andern erhält man dann, indem man zu dem ersten den entsprechenden Durchmesser des umgeschriebenen Kreises und zu dem auf diesem senkrecht stehenden Kreisdurchmesser wieder den entsprechenden Ellipsendurchmesser bestimmt, oder auch, indem man einfach den Mittelpunkt einer beliebigen, zu dem gegebenen Durchmesser parallelen Sehne mit dem Mittelpunkte der Ellipse verbindet. Analytisch kann dieselbe Aufgabe dadurch gelöst werden, dafs man aus dem Richtungskoeffizienten des gegebenen Durchmessers den des konjugierten zu bestimmen sucht. Zwischen den Richtungskoeffizienten zweier konjugierter Durchmesser

besteht nämlich eine sehr einfache Relation. Bezeichnet man die Winkel, die irgend zwei konjugierte Durchmesser mit der positiven x-Achse bilden, mit α und β, so sind die Richtungskoeffizienten der beiden entsprechenden Kreisdurchmesser $\frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha$ und $\frac{a}{b}\operatorname{tg}\beta$ (§ 27). Da diese aber auf einander senkrecht stehen, so ist:

$$\frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{a}{b}\operatorname{tg}\beta = -1,$$

d. h.:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2}, \tag{1}$$

oder:

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2} = 0. \tag{2}$$

Wir erhalten also den Satz:

III. Das Produkt der Richtungskoeffizienten zweier konjugierter Durchmesser ist konstant.

Da $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$ stets negativ ist, so mufs von den Winkeln α und β stets der eine ein spitzer, der andere ein stumpfer sein. Sei etwa α der spitze Winkel. Wächst dann α, so wächst auch $\operatorname{tg}\alpha$, und es mufs daher $\operatorname{tg}\beta$, absolut genommen, abnehmen, d. h. der Winkel β mufs wachsen. Da ferner

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

mit Rücksicht auf Gl. (1) stets negativ ist, so mufs $\beta - \alpha$ allemal ein stumpfer Winkel sein. Diese Betrachtungen führen zu dem Satze:

IV. Konjugierte Durchmesser werden durch die Achsen getrennt. Durchläuft der eine, etwa im positiven Sinne, den ersten Quadranten, so durchläuft der andere in demselben Sinne den zweiten Quadranten und zwar so, dafs der von der kleinen Achse durchschnittene Winkel stets ein stumpfer ist.

Nur für $\alpha = 0$ ist der Winkel der beiden konjugierten Durchmesser ein Rechter, denn aus Gl. (1) folgt dann $\beta = 90^0$. Also:

V. Die Hauptachsen sind konjugierte Durchmesser und zwar die einzigen, die auf einander senkrecht stehen.

Dieser Satz führt zu einer einfachen Konstruktion der Achsen einer Ellipse, die gezeichnet vorliegt. Man beschreibe über einem (aus Satz I zu konstruierenden) Durchmesser einen Halbkreis und verbinde den Schnittpunkt, den dieser mit der Ellipse bildet, mit den Endpunkten des Durchmessers. Die durch den Mittelpunkt der Ellipse zu den Sehnen gezogenen Parallelen sind dann die Achsen. Denn sie stehen senkrecht auf einander und jeder halbiert eine Sehne, die dem andern parallel ist.

Aufg. 1. In den einer Ellipse umgeschriebenen Kreis zeichne man, in symmetrischer Lage zu den Achsen, ein reguläres Achteck und dazu die entsprechende Figur der Ellipse.

Aufg. 2. Welches Paar konjugierter Durchmesser liegt symmetrisch zu den Achsen? Man benutze die entsprechenden Durchmesser des Kreises oder die Gleichung (1) und zeige, dafs die gesuchten Durchmesser die Diagonalen des durch die Scheitel gehenden umgeschriebenen Rechtecks sind.

Aufg. 3. Man bestimme den Richtungskoeffizienten des Durchmessers, dessen konjugierter unter 45^0 geneigt ist, und konstruiere den Durchmesser mit Hülfe des Kreises.

Aufg. 4. Man konstruiere die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Ellipse, von der nur die Hauptachsen gegeben sind, ohne die Ellipse selbst zu zeichnen.

Aufg. 5. Es sei (x_1, y_1) ein Punkt der Ellipse, folglich $xy_1 - yx_1 = 0$ die Gleichung des zugehörigen Durchmessers. Beweise mit Hülfe von Gleichung (1), dafs der konjugierte Durchmesser die Gleichung $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 0$ besitzt. Bestimme hieraus die Koordinaten seiner Endpunkte.

Aufg. 6. Beweise mit Hülfe des umgeschriebenen Kreises, dafs jede Gerade die Ellipse in zwei Punkten schneidet, die reell und verschieden, reell und zusammenfallend, oder imaginär sein können.

§ 44. Die Gleichung der Ellipse, bezogen auf zwei konjugierte Durchmesser als schiefwinklige Koordinatenachsen.

Die auf die Hauptachsen bezogene Gleichung der Ellipse sei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Zwei konjugierte Durchmesser mögen mit der positiven x-Achse die Winkel α und β einschliefsen, so ist (§ 43, (2)):

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2} = 0. \tag{2}$$

Sind die beiden zu α und β gehörigen Durchmesser gleich $2a'$ und $2b'$, so bestehen zwischen a' und α einerseits, b' und β andrerseits die Relationen (§ 41):

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{1}{a'^2}, \tag{3}$$

$$\frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2} = \frac{1}{b'^2}. \tag{4}$$

Man wähle jetzt die beiden durch α und β bestimmten Durchmesser als x'-Achse und y'-Achse eines neuen, schiefwinkligen Koordinatensystemes. Dann gelten (§ 15) die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\cos\beta, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\sin\beta. \end{aligned} \tag{5}$$

Führt man aber diese Werte von x und y in (1) ein und berücksichtigt (2), (3) und (4), so ergiebt sich (vergleiche auch § 15, Aufg. 3):

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1, \tag{6}$$

als Gleichung der Ellipse, bezogen auf die konjugierten Durchmesser $2a'$ und $2b'$.

Diese Gleichung setzt die im vorhergehenden Paragraphen besprochene (schiefe) Symmetrie der Ellipse in Bezug auf zwei konjugierte Durchmesser in Evidenz. Sie ist genau von derselben Form wie die auf die Hauptachsen bezogene Ellipsengleichung, die sie als speziellen Fall enthält.

Aufg. 1. Wie lautet die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen $a = 7$, $b = 5$, bezogen auf ein Paar konjugierter Durchmesser, von denen der als Abscissenachse gewählte parallel der Geraden $2x + 7y - 4 = 0$ ist?

Aufg. 2. Man suche die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen a und b, bezogen auf die beiden zu den Achsen symmetrischen konjugierten Durchmesser. Man findet:

$$x'^2 + y'^2 = a'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \quad (\S\ 43,\ \text{Aufg. } 2).$$

§ 45. Die Ellipse und die Gerade. Die Tangente in einem Punkte der Ellipse.

Um die Schnittpunkte der auf die beiden konjugierten Durchmesser $2a'$ und $2b'$ bezogenen Ellipse

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1 \tag{1}$$

mit der auf dasselbe Koordinatensystem bezogenen Geraden

$$Ax + By + C = 0 \tag{2}$$

zu finden, rechne man aus (2) y aus und setze in (1) ein. Man erhält dann die quadratische Gleichung

$$(A^2a'^2 + B^2b'^2)x^2 + 2ACa'^2x + (C^2 - B^2b'^2)a'^2 = 0, \tag{3}$$

deren beide Wurzeln die Abscissen der Schnittpunkte liefern. Ihre Realität hängt von dem Vorzeichen der Diskriminante

$$\begin{aligned} A^2C^2a'^4 - (A^2a'^2 + B^2b'^2)(C^2 - B^2b'^2)a'^2 \\ = a'^2b'^2B^2(A^2a'^2 + B^2b'^2 - C^2), \end{aligned} \tag{4}$$

d. h. von dem Vorzeichen des Ausdruckes $A^2a'^2 + B^2b'^2 - C^2$ ab. Es folgt also:

Die Gerade schneidet die Ellipse in zwei reellen und von einander verschiedenen, in zwei reellen und zusammenfallenden, oder in zwei imaginären Punkten, je nachdem $A^2a'^2 + B^2b'^2 \gtreqless C^2$ ist.

Verweilen wir speziell bei dem Falle, wo die Gerade die Ellipse in zwei zusammenfallenden Punkten trifft, d. h. be-

rührt. Die quadratische Gleichung (3) liefert dann die Abscisse x_1 des Berührungspunktes, und zwar findet man, mit Rücksicht auf $A^2a'^2 + B^2b'^2 = C^2$, leicht:

$$x_1 = -\frac{A}{C}a'^2. \tag{5}$$

Führt man diesen Wert in (2) ein, so erhält man die Ordinate des Berührungspunktes, nämlich:

$$y_1 = -\frac{B}{C}b'^2. \tag{6}$$

Mit Hülfe dieser Koordinaten x_1, y_1 des Berührungspunktes kann man aber jetzt $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ durch $-\frac{x_1}{a'^2}$ und $-\frac{y_1}{b'^2}$ ersetzen, wodurch die Gleichung $Ax + By + C = 0$, d. h. die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) die Form erhält:

$$\frac{xx_1}{a'^2} + \frac{yy_1}{b'^2} = 1. \tag{7}$$

Diese Gleichung ist so wichtig, dafs wir sie noch auf einem zweiten Wege ableiten wollen. Die Tangente der Ellipse in einem Punkte P_1 war (§ 34) als die Grenzlage definiert worden, der sich die Sekante P_1P_2 nähert, wenn der zweite Schnittpunkt P_2 mit P_1 zusammenfällt. Sind x_1, y_1 und x_2, y_2 die Koordinaten der Ellipsenpunkte P_1 und P_2, so lautet die Gleichung der Sekante P_1P_2:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{8}$$

Da aber

$$\frac{x_1^2}{a'^2} + \frac{y_1^2}{b'^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a'^2} + \frac{y_2^2}{b'^2} = 1$$

ist, so folgt:

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{a'^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{b'^2} = 0,$$

oder:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b'^2}{a'^2}\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}, \tag{9}$$

sodafs wir die Gleichung der Sekante P_1P_2 in der Form schreiben können:

$$y - y_1 = -\frac{b'^2}{a'^2}\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1).$$

Lassen wir nun P_2 mit P_1 zusammenfallen und setzen demnach $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, so erhalten wir als Gleichung der Tangente im Punkte P_1:

$$(10) \qquad y - y_1 = -\frac{b'^2 x_1}{a'^2 y_1}(x - x_1).$$

Eine einfache Umformung führt zu:

$$\frac{x x_1}{a'^2} + \frac{y y_1}{b'^2} = \frac{x_1^2}{a'^2} + \frac{y_1^2}{b'^2}.$$

Da aber P_1 auf der Ellipse liegt, ist die rechte Seite gleich 1, d. h. wir gelangen wieder zur Gleichung (7).

Aufg. 1. Bezieht man die Gleichung der Ellipse auf die Halbachsen a und b, so lautet die Gleichung der Tangente:

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

Man leite diese Gleichung dadurch ab, dafs man für den entsprechenden Kreispunkt (x_1', y_1') die Gleichung der Tangente $x' x_1' + y' y_1' = a^2$ aufstellt und zu dieser die entsprechende Gerade aufsucht, die dann die Tangente in (x_1, y_1) ist.

Aufg. 2. Bringe die auf die Achsen bezogene Tangentengleichung auf die Normalform.

Aufg. 3. Bestimme die Achsenabschnitte der Tangente $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$.

Aufg. 4. Konstruiere die Tangente im Punkte (x_1, y_1) mit Hülfe der Bemerkung, dafs die Tangente in dem entsprechenden Kreispunkte (x_1', y_1') denselben Abschnitt auf der grofsen Achse bestimmt wie die Ellipsentangente.

Aufg. 5. Man suche den Berührungspunkt und die Gleichung der Tangente, die einer durch ihre Achsenabschnitte oder durch die Gleichung $x \cos\alpha + y \sin\alpha - \delta = 0$ gegebenen Geraden parallel ist.

Aufg. 6. Wähle in der vorhergehenden Aufgabe als gegebene Gerade speziell die Verbindungslinie der beiden Scheitel A und B.

Aufg. 7. Die Gerade $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ berührt die Ellipse $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$, wenn $\frac{a'^2}{p^2} + \frac{b'^2}{q^2} = 1$ ist. Welcher Bedingung sind daher umgekehrt a' und b' unterworfen, wenn p und q gegeben sind? Die Antwort führt zu einem bemerkenswerten Satze.

§ 46. Tangenten und Durchmesser.

Setzt man in der auf zwei beliebige konjugierte Durchmesser $2a'$ und $2b'$ bezogenen Tangentengleichung

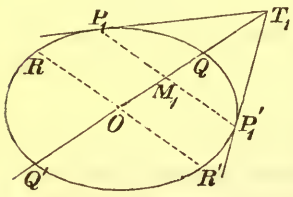
$$\frac{xx_1}{a'^2} + \frac{yy_1}{b'^2} = 1$$

das eine Mal $y_1 = 0$, $x_1 = a'$ das andere Mal $y_1 = 0$, $x_1 = -a'$, so erhält man die Gleichungen der beiden Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers $2a'$, nämlich $x = a'$ und $x = -a'$. Dies sind aber die Gleichungen zweier Parallelen zur y-Achse, d. h. zum konjugierten Durchmesser $2b'$. Es folgt daher (vergl. § 45, Aufg. 5):

I. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser und folglich auch einander parallel.

Man kann diesen Satz auch so ableiten, dafs man eine Sehne parallel zu sich so lange verschiebt, bis ihre Schnittpunkte zusammengefallen sind und die Sehne zur Tangente geworden ist. Der zu dem Berührungspunkte gehörige Durchmesser ist dann, als Ort der Mittelpunkte der parallelen Sehnen, zu ihrer Richtung konjugiert.

Fig. 36.



Bestimmt man für zwei zur x-Achse, d. h. zum Durchmesser $2a'$, symmetrisch gelegene Punkte (x_1, y_1) und $(x_1, -y_1)$ die Tangenten und berechnet, indem man $y = 0$ setzt, für beide den Abschnitt auf der x-Achse, so findet man beide Male denselben Abschnitt: $OT_1 = \frac{a'^2}{x_1}$, d. h.:

II. Zwei beliebige Tangenten der Ellipse treffen sich stets in einem Punkte des Durchmessers, der die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte halbiert.

Schreibt man die Gleichung $OT_1 = \frac{a'^2}{x_1}$ in der Form $OT_1 \cdot OM_1 = a'^2 = OQ^2 = OQ'^2$, so erkennt man, dafs Q, Q', M_1, T_1 harmonische Punkte sind.

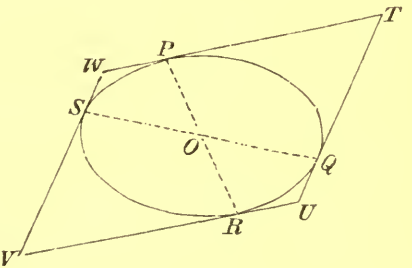
Zwei Sehnen, die einen beliebigen Punkt der Ellipse mit den Endpunkten eines Durchmessers verbinden, heifsen

Supplementarsehnen. Zieht man zu zwei Supplementarsehnen parallele Durchmesser, so werden jene von diesen halbiert; von den beiden Durchmessern halbiert also jeder eine Sehne, die dem andern parallel ist, d. h.:

III. Die zu irgend einem Paare Supplementarsehnen parallelen Durchmesser sind konjugiert.

Denken wir einer Ellipse ein ganz beliebiges Parallelogramm umgeschrieben, indem wir in den Endpunkten zweier beliebiger Durchmesser PR und QS die Tangenten konstruieren, so bilden die Berührungspunkte P, Q, R, S ein der Ellipse eingeschriebenes Parallelogramm. Zieht man nun die zu den Seiten dieses Parallelogrammes parallelen Durchmesser, so sind diese nach Satz III konjugiert und halbieren die Seiten des eingeschriebenen Parallelogrammes. Infolge von Satz II gehen dann aber diese Durchmesser durch die Ecken T, U, V, W des umgeschriebenen Parallelogrammes, d. h. sie sind seine Diagonalen. Es gilt daher der Satz:

Fig. 37.



IV. Die Diagonalen eines jeden der Ellipse umgeschriebenen Parallelogrammes sind konjugierte Durchmesser.

Wir wollen endlich noch die Gleichung der Ellipse ableiten, wenn zur x-Achse ein beliebiger Durchmesser $2a'$ und zur y-Achse die in dem einen Endpunkte von $2a'$ konstruierte Tangente gewählt wird, die dann nach I dem konjugierten Durchmesser $2b'$ parallel ist. Die auf $2a'$ und $2b'$ bezogene Ellipsengleichung lautet:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1. \tag{1}$$

Um auf die neuen Achsen zu transformieren, haben wir nur x durch $x - a'$ zu ersetzen (§ 6), indem wir der Einfachheit halber auch für die neuen Koordinaten die Bezeichnungen x, y (statt x', y') wählen.

Man erhält dann:

$$\frac{(x-a')^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1,$$

oder:

$$y^2=2\frac{b'^2}{a'}x-\frac{b'^2}{a'^2}x^2. \tag{2}$$

Geht man speziell von den beiden symmetrisch zu den Hauptachsen gelegenen konjugierten Durchmessern aus (§ 44, Aufg. 2), so ist $a'=b'$, und die Gleichungen (1) und (2) nehmen dann die Form an:

$$x^2+y^2=a'^2 \tag{3}$$

und:

$$y^2=2a'x-x^2. \tag{4}$$

Diese Gleichungen stimmen genau mit der Mittelpunktsgleichung und der Scheitelgleichung des Kreises überein (§ 31, Gl. (6) und (3)). Während sie aber bei dem Kreise für unzählig viele rechtwinklige Koordinatensysteme gelten, finden sie bei der Ellipse nur für ein einziges und zwar schiefwinkliges Achsensystem Anwendung.

Legt man endlich rechtwinklige Koordinaten zu Grunde, indem man setzt $a'=a$, $b'=b$, $\frac{b^2}{a}=p$, wo p den Halbparameter bedeutet, so geht (2) in die Scheitelgleichung der Ellipse über, nämlich in:

$$y^2=2px-\frac{p}{a}x^2. \tag{5}$$

Aufg. Man konstruiere zu einer Ellipse ein beliebiges umgeschriebenes Parallelogramm oder Rechteck. Welche Lage müssen umgeschriebene Rhomben haben?

§ 47. Die exzentrische Anomalie.

Schreiben wir die auf die Hauptachsen bezogene Ellipsengleichung in der Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1, \tag{1}$$

so erkennen wir, dafs die echten Brüche $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$ als Kosinus und Sinus desselben Winkels v angesehen werden können.

Setzen wir nämlich

$$x = a\cos v, \quad y = b\sin v, \tag{2}$$

so erhalten wir für jedes Zahlenpaar x, y, das der Gleichung (1) genügt, und nur für solche, aus den Gleichungen (2) einen ganz bestimmten Wert von v. Aber auch umgekehrt liefern die Gleichungen (2) für jeden Wert von v ein Zahlenpaar x, y, das der Gleichung (1) genügt, denn es ist allemal:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 v + \sin^2 v = 1.$$

Da also Gleichung (1) und die Gleichungen (2) genau dieselben Zahlenpaare x, y definieren, so sagen wir, die beiden Gleichungen (2) seien der einen Gleichung (1) äquivalent. Man nennt den variabeln Parameter v, mit Hülfe dessen man sämtliche Punkte der Ellipse darstellen kann, die exzentrische Anomalie des Punktes (x, y). Da ein Punkt der Ellipse vollständig durch seine exzentrische Anomalie bestimmt ist, so können wir den Punkt (x, y) der Ellipse auch kurz den Punkt (v) nennen.

Aus der Figur des § 42 ergiebt sich aber auch sofort die geometrische Bedeutung von v. Trifft nämlich ein beliebiger, durch den Mittelpunkt der Ellipse gezogener Strahl den eingeschriebenen Kreis in Q, den umgeschriebenen Kreis in P', so hat der zugehörige Ellipsenpunkt (man vergl. die a. a. O. beschriebene Konstruktion) dieselbe Abscisse wie P' und dieselbe Ordinate wie Q. Da aber P die Koordinaten $a\cos v$ und $b\sin v$ besitzt, so folgt, daſs v gleich dem Winkel ist, den der Strahl OQP' mit der positiven Richtung der x-Achse bildet. d. h.:

Die exzentrische Anomalie eines Ellipsenpunktes ist die Anomalie des entsprechenden Punktes des umgeschriebenen Kreises.

Aufg. 1. Bestimme die exzentrische Anomalie des Punktes $(3; -1, 6)$ der Ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Aufg. 2. Durch welche Gleichungen wird die exzentrische Anomalie eines Punktes der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ definiert, der senkrecht über einem Brennpunkte liegt?

Aufg. 3. Bestimme die Koordinaten des Punktes $v = 45^0$.

Aufg. 4. In welcher Beziehung stehen die exzentrischen Anomalien der Endpunkte eines Durchmessers?

§ 48. Weitere Sätze über konjugierte Durchmesser.

Sei P ein beliebiger Punkt der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Bezeichnet man mit v seine exzentrische Anomalie, mit x, y seine rechtwinkligen Koordinaten und mit a' den zugehörigen Halbmesser OP, so hat man:

$$x = a \cos v, \quad y = b \sin v,$$

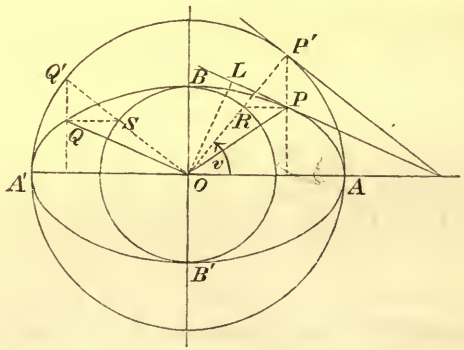
$$a'^2 = x^2 + y^2,$$

folglich:

$$a'^2 = a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v. \tag{1}$$

Aus der in § 43 gegebenen Konstruktion des zu OP konjugierten Halbmessers OQ, die auch die nachstehende Figur zur Darstellung bringt, folgt, dafs der Endpunkt Q die

Fig. 38.



exzentrische Anomalie $v + 90^0$ und somit die Koordinaten $-a \sin v$ und $b \cos v$ besitzt. Setzt man nun $OQ = b'$, so folgt:

$$b'^2 = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v. \tag{2}$$

Addiert man aber (1) und (2), so erhält man:

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \tag{3}$$

d. h.: I. Die Summe der Quadrate zweier konjugierter Halbmesser ist konstant und zwar gleich der Summe der Quadrate der Halbachsen.

Um ferner den Inhalt des von den beiden konjugierten Halbmessern OP und OQ gebildeten Dreiecks OPQ zu berechnen, haben wir nur die Koordinaten $a\cos v$, $b\sin v$ und $-a\sin v$, $b\cos v$ der Punkte P und Q in die Formel

$$J = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

einzusetzen. Wir erhalten:

$$J = \tfrac{1}{2}ab, \tag{4}$$

oder in Worten:

II. Das durch die Verbindung der Endpunkte zweier konjugierter Halbmesser entstehende Dreieck hat einen konstanten Inhalt.

Da der Inhalt des Dreiecks OPQ aber auch durch $\frac{1}{2}a'b'\sin\omega$ ausgedrückt werden kann, insofern ω den von den beiden konjugierten Durchmessern eingeschlossenen spitzen Winkel bedeutet, so erhalten wir aus

$$\tfrac{1}{2}ab = \tfrac{1}{2}a'b'\sin\omega$$

die Relation:

$$\sin\omega = \frac{ab}{a'b'}, \tag{5}$$

durch die man den von den beiden konjugierten Durchmessern $2a'$ und $2b'$ eingeschlossenen spitzen Winkel, den sogenannten Konjugationswinkel, berechnen kann.

Der Konjugationswinkel wird seinen kleinsten Wert erhalten, wenn das Produkt $a'b'$ seinen gröfsten Wert annimmt. Nun ist:

$$2a'b' = a'^2 + b'^2 - (a'-b')^2 = a^2 + b^2 - (a'-b')^2,$$

woraus man erkennt, dafs für $a' = b'$ das Produkt $a'b'$ ein Maximum wird. Dieser Fall tritt ein, wenn die exzentrische Anomalie von a' gleich 45^0 wird; dann folgt aber aus (1) und (2) (oder auch aus Satz I):

$$a'^2 = b'^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \quad (\S\ 44,\ \text{Aufg. } 2) \tag{6}$$

und ferner:

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}. \tag{7}$$

Wir sehen also:

III. Unter allen Paaren konjugierter Durchmesser schliefst das Paar der gleichen, zu den Hauptachsen symmetrisch gelegenen konjugierten Durchmesser den kleinsten Konjugationswinkel ein.

Bezeichnen wir mit δ den Abstand OL des Mittelpunktes O von der Tangente in P, die ja zu OQ parallel ist, so ist δ zugleich der Abstand des Punktes P von OQ, und demnach das Dreieck OPQ auch gleich $\frac{1}{2}b'\delta$. Durch Vergleichen mit $\frac{1}{2}ab$ ergiebt sich dann aber die wichtige Formel:

$$\delta = \frac{ab}{b'}. \tag{8}$$

Diese Gleichung können wir auch direkt ableiten. Setzt man nämlich in die Gleichung $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ einer Ellipsentangente für die Koordinaten des Berührungspunktes (x_1, y_1) die Koordinaten von P, nämlich $a\cos v$, $b\sin v$ ein, so erhält man die Gleichung der Tangente in P in der bemerkenswerten Form:

$$\frac{x\cos v}{a} + \frac{y\sin v}{b} = 1. \tag{9}$$

Aus dieser Gleichung findet man den Abstand δ der Tangente vom Anfangspunkte (§ 22), nämlich:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 v}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v}}.$$

Der Nenner ist aber zufolge Gleichung (2) gleich b'.

Aufg. 1. Sprich Satz II in der Form aus: Die Parallelogramme, die entstehen, wenn man die Endpunkte irgend zweier konjugierter Durchmesser verbindet, sind inhaltsgleich. Beweise, dafs auch die Parallelogramme, die durch die Tangenten in den Endpunkten konjugierter Durchmesser gebildet werden, konstanten Inhalt haben.

Aufg. 2. Zeige, dafs $\operatorname{tg}\omega = -\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{2ab}{c^2\sin 2v}$ ist, insofern ω den Konjugationswinkel und v die dem spitzen Winkel α entsprechende exzentrische Anomalie bedeutet. Für $v = 45^0$ folgt dann Satz III. Die trigonometrischen Funktionen des

kleinsten Konjugationswinkels sind $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=\frac{b}{a}$, $\sin\omega=\frac{2ab}{a^2+b^2}$, $\cos\omega=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ etc.

Aufg. 3. Aus der Länge a' eines Halbmessers berechne man die zugehörige exzentrische Anomalie v und den Winkel α, den a' mit der x-Achse bildet. Mit Hülfe von (1) findet man:

$$\operatorname{tg} v=\sqrt{\frac{a^2-a'^2}{a'^2-b^2}},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-a'^2}{a'^2-b^2}}$$

Aufg. 4. Einem gegebenen Parallelogramme mit den Diagonalen $2a'$ und $2b'$, deren spitzer Winkel gleich ω sei, kann stets eine, aber auch nur eine Ellipse umgeschrieben werden, für die jene Diagonalen konjugierte Durchmesser sind. Man findet nämlich zunächst die Achsen a und b in eindeutiger Weise aus $a^2+b^2=a'^2+b'^2$ und $ab=a'b'\sin\omega$ und zwar erhält man:

$$a+b=\sqrt{a'^2+b'^2+2a'b'\sin\omega},\quad a-b=\sqrt{a'^2+b'^2-2a'b'\sin\omega}.$$

Die Lage der Achse a findet man dann aus dem in Aufg. 3 gegebenen Ausdrucke für $\operatorname{tg}\alpha$.

Aufg. 5. Führe die vorhergehende Aufgabe durch für $a'=13$, $b'=6$, $\sin\omega=\frac{7}{13}$.

Aufg. 6. Für die Abstände δ und δ' zweier zu einander senkrechter Tangenten vom Anfangspunkte hat man (§ 45, Aufg. 5):

$$\delta^2=a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha,\quad \delta'^2=a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha,$$

folglich $\delta^2+\delta'^2=a^2+b^2$. Beweise daraus, dafs der Ort der Schnittpunkte zu einander senkrechter Tangenten der mit dem Radius $\sqrt{a^2+b^2}$ um den Mittelpunkt der Ellipse beschriebene Kreis ist. Beweise den gleichen Satz auch aus (8), mit Benutzung von § 41, Gl. (9).

Aufg. 7. Beweise Satz II aus der Affinität der Dreiecke OPQ und $OP'Q'$.

§ 49. Pol und Polare.

Die auf zwei konjugierte Durchmesser $2a'$ und $2b'$ bezogene Gleichung einer Ellipse lautet:

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1. \tag{1}$$

Es seien nun zwei beliebige Punkte P_1 und P_2 gegeben, deren Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 sich auf dieselben schiefwinkligen Achsen $2a'$ und $2b'$ beziehen sollen. Um die Schnittpunkte der Geraden P_1P_2 mit der Ellipse zu bestimmen, erinnern wir uns, dafs ein jeder Punkt P der Verbindungslinie P_1P_2 durch die Koordinaten

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \tag{2}$$

dargestellt werden kann, insofern λ das Teilverhältnis von P in Bezug auf P_1P_2 bedeutet. Soll P auch auf der Ellipse liegen, so müssen seine Koordinaten der Gleichung (1) genügen, d. h. es mufs sein:

$$\frac{1}{a'^2}\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\right)^2 + \frac{1}{b'^2}\left(\frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\right)^2 = 1,$$

oder geordnet:

$$\lambda^2\left(\frac{x_2^2}{a'^2} + \frac{y_2^2}{b'^2} - 1\right) + 2\lambda\left(\frac{x_1 x_2}{a'^2} + \frac{y_1 y_2}{b'^2} - 1\right) + \left(\frac{x_1^2}{a'^2} + \frac{y_1^2}{b'^2} - 1\right) = 0. \tag{3}$$

Die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 dieser quadratischen Gleichung stellen die Teilverhältnisse der Schnittpunkte von P_1P_2 mit der Ellipse dar. Liegen nun zufällig die Punkte P_1 und P_2 so, dafs der Koeffizient von 2λ, nämlich $\frac{x_1 x_2}{a'^2} + \frac{y_1 y_2}{b'^2} - 1$, verschwindet, so sind die Wurzeln von (3) einander entgegengesetzt gleich, und es bilden dann die Punkte P_1 und P_2 mit den Schnittpunkten S_1 und S_2 (falls diese überhaupt reell sind) eine harmonische Gruppe. Sollen umgekehrt P_1, P_2, S_1, S_2 harmonische Punkte sein, so mufs $\lambda_1 = -\lambda_2$, d. h. $\frac{x_1 x_2}{a'^2} + \frac{y_1 y_2}{b'^2} - 1 = 0$ sein.

Dies vorausgeschickt, sei jetzt P_1 ein fester Punkt. Wir legen durch ihn alle möglichen Strahlen und bestimmen jedesmal zu P_1 und den beiden Schnittpunkten S_1 und S_2 (falls diese überhaupt reell sind) den vierten harmonischen, P_1 zugeordneten Punkt P_2. Die Koordinaten von P_2 müssen dann nach dem Vorhergehenden allemal der Gleichung

$$\frac{x x_1}{a'^2} + \frac{y y_1}{b'^2} = 1 \tag{4}$$

genügen, und umgekehrt ist jeder Punkt, dessen Koordinaten (4) befriedigen, so gelegen, dafs seine Verbindungslinie mit P_1 durch die Ellipse harmonisch geteilt wird, falls sie diese überhaupt in reellen Punkten trifft. Da aber (4) die Gleichung einer Geraden ist, so folgt:

Zieht man von einem beliebigen Punkte Strahlen nach einer Ellipse und bestimmt jedesmal zu den beiden Schnittpunkten und dem gegebenen Punkte, als zugeordnetem, den vierten harmonischen Punkt, so ist der Ort dieser vierten harmonischen Punkte eine gerade Linie.

Man nennt diese Gerade die Polare des gegebenen Punktes und diesen den Pol der Geraden.

Liegt P_1 innerhalb der Ellipse, so liegen die vierten harmonischen Punkte alle aufserhalb (§ 4); die Polare schneidet dann die Ellipse nicht. Befindet sich dagegen P_1 aufserhalb, so erhält man für jeden Strahl, der die Ellipse in reellen Punkten trifft, einen innerhalb gelegenen vierten harmonischen Punkt; die Polare trifft dann die Ellipse in zwei reellen Punkten.

Liegt endlich P_1 auf der Ellipse, so stellt (4) die Gleichung der Tangente von P_1 dar, d. h.: Die Tangente einer Ellipse ist die Polare ihres Berührungspunktes, dieser der Pol seiner Tangente. Dasselbe zeigt auch Gleichung (3); denn wenn der Koeffizient von λ und das absolute Glied verschwinden, so ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, d. h. die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 von P_1P_2 fallen zusammen, sodafs P_2 allemal auf der Tangente von P_1 liegen mufs.

Wie zu jedem Punkte P_1 eine ganz bestimmte Polare gehört, so kann auch umgekehrt jede Gerade als die Polare eines ganz bestimmten Poles aufgefasst werden. Denn die Gleichung $Ax + By + C = 0$ einer beliebigen Geraden wird mit (4) identisch, sobald man setzt:

$$(5) \qquad x_1 = -\frac{A}{C}a'^2, \quad y_1 = -\frac{B}{C}b'^2.$$

Es ist daher die Gerade $Ax + By + C = 0$ die Polare des durch (5) definierten Punktes.

Für $C = 0$ liegt der Pol im Unendlichen. Wir werden

diesen Fall im nächsten Paragraphen besprechen, in dem die gegenseitige Lage von Pol und Polare ausführlicher erörtert werden soll.

Aufg. 1. Man konstruiere zu einem beliebigen Punkte P in Bezug auf eine Ellipse die Polare mittels des vollständigen Vierecks. Man lege durch P zwei Strahlen, die die Ellipse in R_1, R_2 und S_1, S_2 schneiden mögen. Die Verbindungslinie des Schnittpunktes von R_1S_2 und R_2S_1 mit dem Schnittpunkte von R_1S_1 und R_2S_2 ist die gesuchte Polare (§ 28).

Aufg. 2. Einer Ellipse sei ein beliebiges Viereck eingeschrieben. Die Schnittpunkte von je zwei Gegenseiten heifsen die drei Diagonalpunkte. Beweise, dafs jeder der Pol der Verbindungslinie der beiden andern ist.

Aufg. 3. Ziehe durch einen Punkt P_1 der Ellipse die sämtlichen Strahlen und bestimme jedesmal zu P_1 und den beiden Schnittpunkten den vierten harmonischen P_2. Inwiefern erscheint dann die Tangente von P_1 als der Ort von P_2?

§ 50. Fortsetzung. Zusammenhang mit der Theorie der konjugierten Durchmesser.

In Bezug auf die Ellipse $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ mögen zwei Punkte P_1 und P_2 so liegen, dafs sich P_2 auf der Polaren von P_1 befindet. Dann besteht die Gleichung:

$$\frac{x_1 x_2}{a'^2} + \frac{y_1 y_2}{b'^2} = 1. \tag{1}$$

Diese Gleichung drückt dann aber auch aus, dafs P_1 auf der Polaren $\frac{x x_2}{a'^2} + \frac{y y_2}{b'^2} = 1$ von P_2 liegt, und es gilt daher der Satz:

I. Liegt ein Punkt P_2 auf der Polaren von P_1, so liegt auch P_1 auf der Polaren von P_2, und umgekehrt.

Man kann diesen Satz auch so aussprechen:

II. Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden, und umgekehrt, dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so bewegt sich ihr Pol auf der Polaren des Punktes.

Oder auch: Den Punkten einer Punktreihe entsprechen als Polaren die Strahlen eines Strahlenbüschels, und umgekehrt.

Aus diesem fundamentalen Satze lassen sich einige wichtige Spezialfälle ableiten. So folgt z. B., dafs die Tangenten in den Endpunkten einer Sehne durch den Pol der Sehne hindurchgehen, oder auch:

III. Die Tangenten, die man von einem aufserhalb gelegenen Punkte P_1 an die Ellipse legen kann, berühren diese in den Schnittpunkten der Polaren von P_1.

Man nennt daher in diesem Falle die Polare auch die Berührungssehne von P_1. Zugleich ergiebt sich:

IV. Von jedem aufserhalb der Ellipse gelegenen Punkte können zwei reelle Tangenten gezogen werden.

Lassen wir jetzt den Pol P_1 einen Durchmesser durchlaufen, den wir, der Einfachheit halber, zur x-Achse wählen. Aus der Gleichung $\frac{xx_1}{a'^2} = 1$ oder $x = \frac{a'^2}{x_1}$ seiner Polaren ergiebt sich sodann:

V. Die Polaren der Punkte eines Durchmessers sind parallel zu dem konjugierten Durchmesser.

Zu dem gleichen Resultate gelangt man, wenn man, statt von dem Pole, von der zur y-Achse parallelen Polaren $Ax + C = 0$ ausgeht. Ihr Pol ist dann durch $x_1 = -\frac{A}{C}a'^2$, $y_1 = 0$ bestimmt (§ 49, Gl. (5)). Für $C = 0$ wird $x_1 = \infty$, und wir erhalten den Satz:

VI. Der Pol eines Durchmessers ist der unendlich ferne Punkt des konjugierten Durchmessers.

Oder auch: Von zwei konjugierten Durchmessern ist jeder die Polare des unendlich fernen Punktes des andern.

Mit Rücksicht auf Satz VI erscheint V als ein Spezialfall von II, da ja die zu einem Durchmesser parallelen Geraden durch den unendlich fernen Punkt des Durchmessers gehen.

Da der Pol eines Durchmessers der unendlich ferne Punkt des konjugierten Durchmessers ist und da alle Durchmesser durch den Mittelpunkt gehen, so müssen wir in Überein-

stimmung mit II die unendlich fernen Punkte der Ebene als auf einer Geraden befindlich annehmen. Diese unendlich ferne Gerade der Ebene ist dann als die Polare des Mittelpunktes zu bezeichnen.

Aufg. 1. Man überzeuge sich, dafs die auf Pol und Polare bezüglichen Sätze unabhängig von dem Koordinatensysteme sind. Dieses wurde nur zur Herleitung benutzt und, wie die Ausführungen des Textes zeigen, für den zu behandelnden Fall allemal zweckentsprechend gewählt.

Aufg. 2. Leite die Sätze V und VI aus den Sätzen I und II von § 46 ab; beachte namentlich die dort gegebene Gleichung $OT_1 = \frac{a'^2}{x_1}$.

Aufg. 3. Zeige direkt, dafs den Punkten der durch $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$ dargestellten Punktreihe als Polaren die Strahlen des Strahlenbüschels $G_1 + \lambda G_2 = 0$ entsprechen, insofern $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ die Polaren von (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind und λ einen variabelen Parameter bedeutet, der alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen hat. Beachte speziell die Werte 0, ∞, $+1$, -1.

Aufg. 4. Leite aus I den Satz ab: Wenn durch einen Punkt P ein beliebiger Strahl nach einer Ellipse gezogen wird, der sie in S_1 und S_2 trifft, so schneiden sich die Tangenten von S_1 und S_2 in einem Punkte Q der Polaren von P.

Aufg. 5. Man leite den in der vorhergehenden Aufgabe ausgesprochenen Satz aus § 49, Aufg. 1, dadurch ab, dafs man die Strahlen PR_1R_2 und PS_1S_2 zusammenfallen läfst.

Aufg. 6. Man beweise Satz III geometrisch dadurch, dafs man den durch P_1 gezogenen Strahl so lange dreht, bis seine Schnittpunkte zusammenfallen.

Aufg. 7. Man überlege an Hand der Zeichnung, wie sich die Berührungssehne bewegt, wenn sich P_1 mehr und mehr der Ellipse nähert.

Aufg. 8. Konstruiere von einem aufserhalb der Ellipse gelegenen Punkte die beiden Tangenten mittels der Polaren (§ 49, Aufg. 1).

Aufg. 9. Man konstruiere, mit Benutzung von I, zu einer die Ellipse nicht schneidenden Geraden den zugehörigen Pol.

Aufg. 10. Bestimme den Ort der Pole der sämtlichen Tangenten des Kreises $x^2 + y^2 = \delta^2$ in Bezug auf die konzentrische Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

§ 51. Brennpunktseigenschaften.

Für die zu einem beliebigen Punkte P der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

gehörigen Brennstrahlen r und r' (§ 39) hatten wir gefunden:

$$r^2 = (c - x)^2 + y^2, \quad r'^2 = (c + x)^2 + y^2. \tag{2}$$

Durch Subtraktion folgt:

$$(r' + r)(r' - r) = 4cx,$$

und da $r' + r = 2a$ ist:

$$r' - r = 2\frac{c}{a}x.$$

Benutzt man nun für die numerische Exzentrizität $\frac{c}{a}$ die Bezeichnung ε (§ 41), so erhält man zur Bestimmung von r und r' die beiden Gleichungen:

$$r' + r = 2a,$$
$$r' - r = 2\varepsilon x,$$

woraus sich ergiebt:

$$r = a - \varepsilon x, \quad r' = a + \varepsilon x. \tag{3}$$

Führt man statt der Abscisse von P die exzentrische Anomalie v ein, indem man $x = a\cos v$ setzt, so erhält man durch Multiplikation von r und r', mit Berücksichtigung von $c = \varepsilon a$ und $c^2 = a^2 - b^2$, die Gleichung:

$$rr' = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v. \tag{4}$$

Nach § 48, Gl. (2), ist aber die rechte Seite gleich b'^2, wenn b' der zu OP konjugierte Halbmesser ist. Wir erhalten daher die bemerkenswerte Gleichung:

$$rr' = b'^2, \tag{5}$$

in Worten:

I. Das Produkt der Brennstrahlen eines Punktes ist gleich dem Quadrate des zu dem Punkte gehörigen konjugierten Halbmessers.

Um die Abstände $d = FG$ und $d' = F'G'$ der beiden Brennpunkte von der zu P gehörigen Tangente zu ermitteln, bringe man die Gleichung der Tangente, nämlich

$$\frac{x \cos v}{a} + \frac{y \sin v}{b} = 1 \quad (\S\ 48,\ \text{Gl. (9)}),$$

auf die Normalform und führe dann die Koordinaten der beiden Brennpunkte F und F' ein. Man erhält dadurch:

$$(6) \qquad d = \frac{b}{b'}(a - c\cos v), \quad d' = \frac{b}{b'}(a + c\cos v),$$

oder:

$$(7) \qquad d = \frac{b}{b'}(a - \varepsilon x), \quad d' = \frac{b}{b'}(a + \varepsilon x),$$

und mit Rücksicht auf (3):

$$(8) \qquad d = \frac{b}{b'} r, \quad d' = \frac{b}{b'} r'.$$

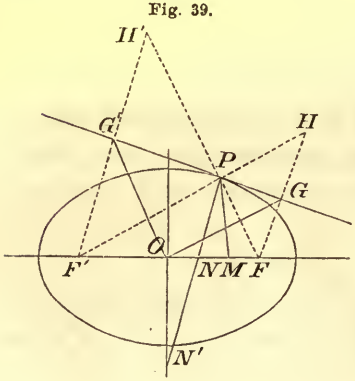
Multipliziert man aber beide Gleichungen und beachtet (5), so folgt:

$$(9) \qquad dd' = b^2,$$

d. h.:

II. Das Produkt der Abstände der Brennpunkte von einer Tangente der Ellipse ist konstant und zwar gleich dem Quadrate der kleinen Halbachse.

Fig. 39.



Aus (8) erhält man ferner die Relation:

$$(10) \qquad \frac{d}{r} = \frac{d'}{r'}.$$

Daraus folgt aber die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke PFG und $PF'G'$ und mithin die Gleichheit der Winkel $F'PG'$ und FPG. Es gilt daher der Satz:

III. Die Tangente bildet mit den Brennstrahlen gleiche Winkel.

Nennt man die im Punkte P der Ellipse auf der Tangente senkrecht stehende Gerade die Normale der Ellipse in P, so kann man Satz III auch so aussprechen:

IV. Die Tangente und Normale eines Punktes der Ellipse sind die Winkelhalbierenden der beiden zu diesem Punkte gehörigen Brennstrahlen.

Aus diesem Satze ergiebt sich noch eine interessante Folgerung. Verlängert man nämlich das von dem Brennpunkte F auf die Tangente in P gefällte Lot $FG = d$ um sich selbst, wodurch man zu dem Gegenpunkte H von F geführt wird, so folgt aus

$$\sphericalangle HPG = \sphericalangle FPG = \sphericalangle F'PG',$$

dafs die Punkte F', P, H in gerader Linie liegen. Nun ist

$$F'H = F'P + PH = F'P + PF = 2a,$$

d. h.:

V. Der Ort der Gegenpunkte eines jeden der beiden Brennpunkte in Bezug auf eine bewegliche Tangente ist der mit dem Radius $2a$ um den andern Brennpunkt beschriebene Kreis.

Beachtet man, dafs FF' in O, FH in G, $F'H'$ in G' halbiert werden, so folgt, dafs OG und OG' zu $F'H$ und FH' parallel sind. Man hat daher:

$$OG = \tfrac{1}{2} F'H \quad \text{und} \quad OG' = \tfrac{1}{2} FH'.$$

Da aber $F'H = FH' = 2a$ ist, so ergiebt sich:

$$OG = OG' = a,$$

d. h.:

VI. Der Ort der Fufspunkte der Lote, die man von den beiden Brennpunkten auf die sämtlichen Tangenten einer Ellipse fällen kann, ist der der Ellipse umgeschriebene Kreis. Oder auch: Die Ellipse wird umhüllt von dem einen Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel einen festen Kreis durchläuft, während der andere Schenkel durch einen im Innern befindlichen festen Punkt hindurchgeht.

Die Wichtigkeit aller dieser Sätze wird es rechtfertigen, wenn wir Satz IV, aus dem sich V und VI als einfache geometrische Folgerungen ergaben, noch auf einem anderen,

direkteren Wege ableiten. Bezeichnet man die Koordinaten von P jetzt mit x_1, y_1, so lautet die Gleichung der Tangente in P:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Da sich hieraus als Richtungskoeffizient $-\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$ ergiebt, so ist der Richtungskoeffizient der Normalen in P gleich $\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$, und folglich heifst die Gleichung der Normalen:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1),$$

oder symmetrischer:

$$a^2 \frac{x - x_1}{x_1} = b^2 \frac{y - y_1}{y_1}. \tag{11}$$

Setzt man $y = 0$, so findet man für den Achsenabschnitt ON den Wert:

$$ON = x_1 - \frac{b^2 x_1}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} x_1,$$

oder:

$$ON = \varepsilon^2 x_1. \tag{12}$$

Daher ist:

$$F'N = c + \varepsilon^2 x_1 = \varepsilon(a + \varepsilon x_1) = \varepsilon r', \tag{13}$$

$$FN = c - \varepsilon^2 x_1 = \varepsilon(a - \varepsilon x_1) = \varepsilon r. \tag{14}$$

Daraus aber folgt:

$$F'N : FN = F'P : FP, \tag{15}$$

und es ist daher nach einem bekannten planimetrischen Satze die Normale die Winkelhalbierende der beiden Brennstrahlen.

Aufg. 1. Berechne aus den Richtungskoeffizienten der Normalen und der beiden Brennstrahlen die beiden Winkel $F'PN$ und FPN und beweise so ihre Gleichheit.

Aufg. 2. Konstruiere die Normale in einem Punkte der Ellipse.

Aufg. 3. Konstruiere von einem Punkte aufserhalb der Ellipse die beiden Tangenten mit Hülfe von Satz V und VI.

Aufg. 4. Von dem einen Brennpunkte einer als spiegelnd gedachten Ellipse mögen nach allen Richtungen hin Strahlen (der Wärme, des Lichtes oder des Schalles) ausgehen. Welchen Weg nehmen die an der Ellipse nach dem bekannten Reflexionsgesetze reflektierten Strahlen?

Aufg. 5. Die Tangente und die Normale in P mögen die x-Achse in T und N schneiden. Beweise, dafs $OT \cdot ON = c^2$ ist, und schliefse daraus, dafs F, F', T, N harmonische Punkte sind. (Vergl. § 4, Aufg. 4—6.)

Aufg. 6. Bestimme in Bezug auf F und F' zu jedem der Scheitel A und A' den vierten harmonischen Punkt A_1 und A_1' und zeige, dafs der Schnittpunkt N einer jeden Normalen stets zwischen A_1 und A_1' liegt. In welcher Beziehung stehen A_1 und A_1' zu den Normalen in A und A'? (Aufg. 5.)

Aufg. 7. Berechne das Stück MN — die sogenannte Subnormale von P.

Aufg. 8. Berechne das Stück PN — die sogenannte begrenzte Normale von P — mit Hülfe der exzentrischen Anomalie von P und zeige, dafs $PN = \frac{bb'}{a}$, wo b' der zu OP konjugierte Halbmesser ist.

Aufg. 9. Berechne aus (11) den Achsenabschnitt ON' der Normalen mit der y-Achse.

Aufg. 10. Beweise mit Hülfe der vorhergehenden Aufgabe, dafs $PN' = \frac{ab'}{b}$ ist, und leite daraus die Sätze ab:

$$PN \cdot PN' = b'^2 \quad \text{und} \quad PN : PN' = b^2 : a^2 = \text{Konst.}$$

Aufg. 11. Bringe den Kosinus des in Aufg. 1 berechneten Winkels $FPN = \varphi$ mit Hülfe der exzentrischen Anomalie auf die Form $\cos\varphi = \frac{b}{b'}$ und beweise daraus, dafs die Projektion der Normalen $PN = \frac{bb'}{a}$ auf einen Brennstrahl konstant und zwar gleich dem Halbparameter p ist.

Aufg. 12. Beweise folgenden Satz: Eine Gerade schneidet die Ellipse, berührt sie, oder liegt ganz aufserhalb, je nachdem der Fufspunkt des von einem Brennpunkte auf die Gerade gefällten Lotes innerhalb, auf der Peripherie, oder aufserhalb des umgeschriebenen Kreises liegt (vergl. § 33).

§ 52. Die Direktrix.

Man nennt die Polare eines Brennpunktes eine Direktrix oder Leitlinie der Ellipse. Ihre Gleichung erhalten wir aus

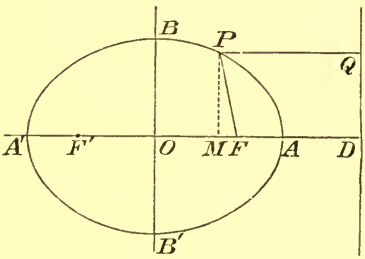
$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

indem wir $x_1 = c$, $y_1 = 0$ setzen. Dies führt zu:

$$x = \frac{a^2}{c}. \tag{1}$$

In gleicher Weise existiert für den andern Brennpunkt eine Direktrix mit der Gleichung $x = -\frac{a^2}{c}$.

Fig. 40.



Die Direktrix des Brennpunktes F ist also, ebenso wie die von F', eine Gerade, die im Abstande $\frac{a^2}{c} = \frac{a}{\varepsilon}$ vom Mittelpunkte auf der grofsen Achse senkrecht steht. Sie läfst sich daher leicht konstruieren.

Berechnet man für einen beliebigen Ellipsenpunkt P den Abstand PF von dem Brennpunkte F und den Abstand PQ von der zu F gehörigen Direktrix, so erhält man:

$$PF = r = a - \varepsilon x,$$

$$PQ = \frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{1}{\varepsilon}(a - \varepsilon x),$$

folglich:

$$\frac{PF}{PQ} = \varepsilon, \tag{2}$$

d. h.:

I. Das Verhältnis der Abstände eines Punktes der Ellipse von einem Brennpunkte und der zugehörigen Direktrix ist konstant und zwar gleich der numerischen Exzentrizität.

Für den andern Brennpunkt F' würden wir aus:

$$PF' = a + \varepsilon x \quad \text{und} \quad PQ' = \frac{a}{\varepsilon} + x = \frac{1}{\varepsilon}(a + \varepsilon x)$$

dasselbe Resultat $\frac{PF'}{PQ'} = \varepsilon$ erhalten haben.

Die Polare eines beliebigen Punktes (x_1, y_1) der zu F gehörigen Direktrix hat, wegen $x_1 = \frac{a^2}{c}$, die Gleichung:

$$\frac{x}{c} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

und geht, wie auch aus der Gleichung zu erkennen ist, durch den Brennpunkt F (§ 50). Da aber der Richtungskoeffizient dieser Polaren gleich $-\frac{b^2}{cy_1}$ ist, während die Verbindungslinie des Punktes (x_1, y_1) mit F den Richtungskoeffizienten $\frac{cy_1}{b^2}$ besitzt, so folgt:

II. Die Verbindungslinie eines Brennpunktes mit dem Pole einer beliebigen, durch ihn hindurchgehenden Sehne steht senkrecht auf dieser.

Oder auch: Das zwischen dem Berührungspunkte und der Direktrix gelegene Stück einer Tangente wird von dem zugehörigen Brennpunkte aus unter einem rechten Winkel gesehen.

Aufg. 1. Welches ist die Direktrix des Kreises, und wie modifizieren sich für diesen die Sätze I und II?

Aufg. 2. Lege mit Hülfe von II von einem beliebigen Punkte der Direktrix die beiden Tangenten an die Ellipse.

Aufg. 3. Beweise, dafs eine Ellipse vollständig bestimmt ist, wenn man einen Brennpunkt, die zugehörige Direktrix und die numerische Exzentrizität kennt (§ 41, Aufg. 6).

Aufg. 4. Mit Hülfe von I ist es leicht, die Schnittpunkte der Ellipse mit einer zur Hauptachse parallelen Geraden PQ (Fig. 40) zu konstruieren. Man beschreibe um F einen Kreis mit dem Radius p und ziehe durch D eine Parallele zu QF. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit jenem Kreise verbinde man mit F. Diese Verbindungslinien treffen dann die Gerade PQ in den gesuchten Schnittpunkten $\left(\text{man beachte } FD = \frac{p}{\varepsilon}\right)$.

§ 53. Flächeninhalt der Ellipse.

Bezeichnet man den Flächeninhalt der Ellipse mit J und den des umgeschriebenen Kreises mit J', so folgt aus der Affinität beider Linien (§ 27) sofort $J = \frac{b}{a} J'$, d. h.:

$$J = \pi ab. \tag{1}$$

Analoges gilt aber auch für jeden beliebigen Teil des Kreises und den entsprechenden Teil der Ellipse, also beispielsweise

für einen beliebigen Kreissektor und den entsprechenden Ellipsensektor. Wenn daher irgend zwei Kreissektoren inhaltsgleich sind, so sind es auch die entsprechenden Ellipsensektoren. Oder wenn überhaupt der Kreis in irgend welcher Weise in n inhaltsgleiche Teile geteilt wird, so wird von den entsprechenden Linien auch die Ellipse in n inhaltsgleiche Teile geteilt. So wird beispielsweise der Kreis durch zwei auf einander senkrechte Durchmesser in vier gleiche Quadranten zerlegt, und wir haben daher:

Die Ellipse wird durch je zwei konjugierte Durchmesser in vier inhaltsgleiche Teile geteilt.

Dieser Satz folgt auch leicht aus der Symmetrie der Ellipse in Bezug auf konjugierte Durchmesser.

Formel (1) kann noch verallgemeinert werden, wenn man statt der auf einander senkrechten Halbachsen a, b zwei beliebige konjugierte Halbmesser a', b' und den zugehörigen Konjugationswinkel ω als bekannt voraussetzt. Dafs dadurch eine Ellipse vollständig bestimmt ist, haben wir § 48, Aufg. 4, gesehen. Da nun $ab = a'b' \sin\omega$ ist, so geht (1) über in:

$$J = \pi a' b' \sin\omega. \tag{2}$$

Aufg. 1. Bestimme den Inhalt einer Ellipse aus dem Halbparameter p und der numerischen Exzentrizität ε.

Aufg. 2. Bestimme den Inhalt einer Ellipse aus der grofsen Achse und der numerischen Exzentrizität.

Aufg. 3. Teile, von der grofsen Achse ausgehend, die Ellipse in 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 inhaltsgleiche Teile.

Aufg. 4. Löse dieselbe Aufgabe, von einem beliebigen Halbmesser ausgehend.

Aufg. 5. Berechne die Achsen und den Inhalt der Ellipse, für die die beiden gleich grofsen konjugierten Durchmesser, deren Länge $2a'$ sei, unter 45^0 gegen einander geneigt sind.

Fünftes Kapitel.

Die Hyperbel.

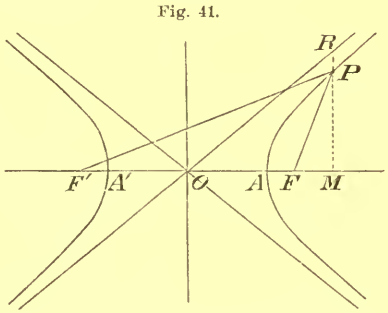
§ 54. Definition und Gleichung der Hyperbel.

Die Hyperbel ist der Ort aller Punkte, für die die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Die beiden festen Punkte F und F' nennt man die Brennpunkte, ihren halben Abstand die Exzentrizität der Hyperbel. Die von irgend einem Punkte P der Hyperbel nach den Brennpunkten gezogenen Strahlen heifsen Brennstrahlen.

Um die Gleichung der Hyperbel abzuleiten, wählen wir, wie bei der Ellipse, FF' als x-Achse und den Mittelpunkt von FF' als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystemes.

Fig. 41.



Es sei $FF' = 2c$, $PF = r$, $PF' = r'$ und die konstante Differenz der beiden Brennstrahlen r' und r gleich $2a$. Aus $PF' - PF < FF'$ folgt dann, dafs $a < c$ sein mufs. Nun ist:

$$r' = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$

Man erhält daher als Gleichung der Hyperbel:

$$(1) \qquad \sqrt{(c+x)^2 + y^2} - \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a.$$

Wie bei der Ellipse findet man durch zweimaliges Quadrieren hieraus:

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0,$$

welche Gleichung sogar genau mit der entsprechenden Ellipsen-

gleichung übereinstimmt. Da aber bei der Hyperbel $a < c$ ist, müssen wir jetzt die Abkürzung

$$c^2 - a^2 = b^2 \tag{2}$$

benutzen und erhalten dann nach Division mit a^2b^2 die Gleichung der Hyperbel in der Form:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Wie bei der Ellipse schliefsen wir aus dem Umstande, dafs die Gleichung nur die Quadrate von x und y enthält, auf die Symmetrie der Hyperbel in Bezug auf die Koordinatenachsen. Während aber bei der Ellipse jede durch den Anfangspunkt O gehende Gerade $y = \mu x$ die Kurve in zwei reellen, zu O symmetrisch gelegenen Punkten traf, begegnen wir bei der Hyperbel einer bemerkenswerten Abweichung. Auch hier erhält man zwar (indem man in (3) μx an die Stelle von y setzt) für die Abscissen der Schnittpunkte zwei entgegengesetzt gleiche Werte, nämlich: $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2\mu^2}}$, aber diese sind nur dann reell, wenn $b^2 - a^2\mu^2 > 0$, d. h. wenn μ, absolut genommen, kleiner als $\frac{b}{a}$ ist. Konstruiert man daher durch O die beiden zu den Achsen symmetrisch gelegenen Geraden $y = +\frac{b}{a}x$ und $y = -\frac{b}{a}x$, so werden nur die Geraden die Hyperbel in reellen, zu O symmetrisch gelegenen Punkten treffen, die in demselben Winkelraume liegen wie die x-Achse; die Geraden aber, die den andern Winkelraum durchschneiden, haben keine reellen Punkte mit der Hyperbel gemein.

Man nennt jede durch O hindurchgehende Gerade einen Durchmesser der Hyperbel, unterscheidet dann aber, je nachdem die Schnittpunkte mit der Hyperbel reell sind oder nicht, zwischen reellen oder Hauptdurchmessern und imaginären oder Nebendurchmessern.

Der Punkt O heifst der Mittelpunkt der Hyperbel.

Aus der nach y aufgelösten Gleichung der Hyperbel

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{4}$$

erkennt man, daſs y nur dann reelle Werte erhält, wenn x, absolut genommen, gröſser als a ist. Legt man daher durch die beiden Punkte $x = +a$ und $x = -a$ der x-Achse zwei Parallelen zur y-Achse, so finden sich innerhalb dieses Parallelstreifens keine Punkte der Hyperbel. Für $x = \pm a$ wird $y = 0$, die Hyperbel trifft daher die x-Achse in zwei Punkten A, A', deren Entfernung gleich $2a$ ist, und die sich folglich zwischen den beiden Brennpunkten befinden. Die Punkte A, A' heiſsen die Scheitel, ihre Verbindungslinie die Hauptachse der Hyperbel.

Läſst man x von $x = a$ an wachsen (die Symmetrie der Hyperbel gestattet die Beschränkung der Diskussion auf positive Werte von x), so nimmt auch y immer gröſsere Werte an. Für $x = c$ erhält man die beiden entgegengesetzt gleichen, zum Brennpunkte F gehörigen Ordinaten $\pm \frac{b^2}{a}$. Auch hier setzt man zur Abkürzung:

$$p = \frac{b^2}{a} \tag{5}$$

und nennt p den Halbparameter der Hyperbel.

Läſst man x über alle Grenzen wachsen, so wächst auch y über alle Grenzen. Dabei zeigt sich aber ein merkwürdiges Verhalten. Schreibt man nämlich (4) in der Form:

$$y = \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2} \tag{6}$$

und berücksichtigt, daſs sich bei wachsendem x der Quotient $\frac{a}{x}$ immer mehr der Null nähert, so erkennt man, daſs sich die beiden, zu einem bestimmten x gehörigen, entgegengesetzt gleichen Ordinaten der Hyperbel immer weniger und weniger unterscheiden von den beiden, zu demselben x gehörigen Ordinaten $y = \frac{b}{a} x$ und $y = -\frac{b}{a} x$ der oben besprochenen geraden Linien. Es wird daher (indem wir uns für den Augenblick auf den ersten Quadranten allein beschränken) die zu einem x gehörige Ordinatendifferenz PR (Fig. 41) mit wachsendem x immer kleiner und kleiner werden, sodaſs sich der Hyperbelast immer mehr und mehr der Geraden $y = \frac{b}{a} x$ nähert, ohne sie jedoch jemals zu erreichen.

Nach allem diesem erhalten wir jetzt folgende Vorstellung von der Gestalt der Hyperbel. Sie besteht aus zwei vollständig von einander getrennten, zur y-Achse symmetrisch gelegenen Teilen. Der eine Teil liegt rechts von der Geraden $x=a$ und vollständig eingeschlossen von den beiden symmetrisch zur x-Achse gelegenen Geraden $y=+\frac{b}{a}x$ und $y=-\frac{b}{a}x$. Er beginnt in dem Punkte $x=a$ der x-Achse und steigt symmetrisch nach beiden Seiten auf, sich immer mehr und mehr jenen beiden Geraden anschliefsend, ohne sie jedoch wirklich zu erreichen. Einen analogen Verlauf nimmt der zweite Teil der Hyperbel, der, vom Punkte $x=-a$ der x-Achse an aufsteigend, sich ebenfalls immer mehr und mehr jenen beiden Geraden anschliefst. Man nennt diese die Asymptoten der Hyperbel; ihre Gleichungen sind:

$$y=\frac{b}{a}x \quad \text{und} \quad y=-\frac{b}{a}x, \tag{7}$$

oder auch:

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \quad \text{und} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0. \tag{8}$$

Für $b=a$ stehen die beiden Asymptoten aufeinander senkrecht; ihre Gleichungen lauten dann einfacher $x-y=0$ und $x+y=0$. Man nennt diese spezielle Hyperbel, deren Gleichung sich also in der Form $x^2-y^2=a^2$ darstellt, eine gleichseitige Hyperbel.

Aufg. 1. Man konstruiere die Hyperbel, für die $a=2$, $c=3$ ist.

Aufg. 2. Zeige, dafs jede Parallele zur Hauptachse die Hyperbel in zwei reellen Punkten trifft.

Aufg. 3. Bestimme die Brennpunkte und zeichne die Asymptoten der Hyperbel $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

Aufg. 4. Wie heifst die Gleichung der Hyperbel mit der Hauptachse $2a$ und dem Halbparameter p?

Aufg. 5. Bestimme die Endpunkte der durch $y=\mu x$ und $y=-\mu x$ dargestellten Durchmesser und diskutiere das Resultat.

Aufg. 6. Berechne und konstruiere aus je zweien der vier Gröfsen a, b, c, p die beiden andern. (§ 40, Aufg. 9.)

Aufg. 7. Bei der Ellipse ist stets $a \geqq b$. Besteht diese Bedingung auch bei der Hyperbel?

Aufg. 8. Von einer Hyperbel kennt man die Asymptoten und die Scheitel. Man konstruiere die Brennpunkte.

Aufg. 9. Welche Kurve wird durch die Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

dargestellt?

Aufg. 10. Beachte, dafs man die Gleichungen der beiden Asymptoten in die eine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

zusammenfassen kann (§ 29, Aufg. 6).

§ 55. Polargleichung der Hyperbel, bezogen auf den Mittelpunkt. Konjugierte Hyperbeln.

Ein beliebiger Punkt P der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

habe die rechtwinkligen Koordinaten x, y und die Polarkoordinaten r, u.

Setzt man alsdann in (1):

$$x = r\cos u, \quad y = r\sin u, \tag{2}$$

so erhält man die auf den Mittelpunkt bezogene Polargleichung der Hyperbel:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 u}{a^2} - \frac{\sin^2 u}{b^2}, \tag{3}$$

die man auch in der Form:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2\cos^2 u - a^2\sin^2 u} \tag{4}$$

schreiben kann.

Berücksichtigt man $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$ und $a^2 + b^2 = c^2$, so erhält man hieraus:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2\cos^2 u - a^2}. \tag{5}$$

Man bedient sich, wie bei der Ellipse, der Bezeichnung:

$$\frac{c}{a} = \varepsilon \quad (\varepsilon > 1) \tag{6}$$

und nennt, im Gegensatze zu der linearen Exzentrizität c, die Gröfse ε die numerische Exzentrizität. Die Polargleichung der Hyperbel nimmt jetzt die Form an:

$$r^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2 \cos^2 u - 1}, \tag{7}$$

die sich nur durch das Vorzeichen von der entsprechenden Ellipsengleichung unterscheidet (§ 41).

Aus (5) ersieht man, dafs der Halbmesser r für $u = 0$ seinen kleinsten Wert, nämlich a, erhält und dafs r mit wachsendem u ebenfalls zunimmt. Während aber bei der Ellipse r immer endlich bleibt, wächst bei der Hyperbel der Halbmesser über alle Grenzen, je mehr sich u dem durch die Gleichung

$$c^2 \cos^2 u - a^2 = 0,$$

oder

$$b^2 \cos^2 u - a^2 \sin^2 u = 0 \tag{8}$$

definierten Werte von u nähert. Läfst man daher u von $u = 0$ an wachsen, so wird r unendlich grofs, sobald

$$\operatorname{tg} u = \frac{b}{a} \tag{9}$$

wird. Nimmt u weiter zu, so wird r^2 negativ, also r imaginär, bis

$$\operatorname{tg} u = -\frac{b}{a} \tag{10}$$

geworden ist. Für diesen Wert wird r wieder unendlich grofs und nimmt dann mit wachsendem u allmählich ab, bis es für $u = 180^0$ wieder den kleinsten Wert, nämlich a, erreicht.

Da durch (9) und (10) die Asymptoten bestimmt werden, so sieht man, dafs diese als Durchmesser zu bezeichnen sind, die die Hyperbel im Unendlichen treffen.

Die beiden Asymptoten der Hyperbel trennen die Durchmesser mit reellen Schnittpunkten — die Hauptdurchmesser — von denen, die keine reellen Schnittpunkte ergeben — den Nebendurchmessern —. Zu den Nebendurchmessern gehört insbesondere die y-Achse. Es ist nun für manche Untersuchungen vorteilhaft, auch diesen Nebendurchmessern in folgender Weise eine bestimmte Länge beizumessen. Für einen Nebendurchmesser ist

$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 u - a^2 \sin^2 u}$ eine negative Gröfse. Man kann daher vom Anfangspunkte O aus auf dem zu u gehörigen Nebendurchmesser vorwärts und rückwärts die Strecke $\varrho = \sqrt{-r^2}$ abtragen und gelangt so zu zwei ganz bestimmten, zu O symmetrisch gelegenen Punkten Q und Q'. Für einen jeden dieser Punkte gilt dann die Gleichung:

$$\varrho^2 = -r^2$$

und folglich (Gl. (3)):

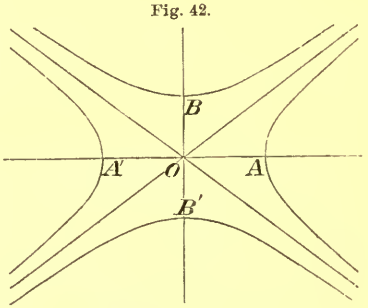
$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\sin^2 u}{b^2} - \frac{\cos^2 u}{a^2}. \tag{11}$$

Führt man aber für $\varrho \cos u$ und $\varrho \sin u$ die rechtwinkligen Koordinaten x und y von Q ein, so geht (11) über in:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \tag{12}$$

Daraus folgt, dafs der Ort der Punkte Q und Q' ebenfalls eine Hyperbel ist. Die Hauptachse dieser Hyperbel fällt in die y-Achse, ihre Scheitel B und B' sind vom Mittelpunkte O um b entfernt, und ihre Exzentrizität ist gleich $\sqrt{a^2+b^2}$, d. h. gleich der der gegebenen Hyperbel. Dadurch ist die zweite Hyperbel vollständig bestimmt. Sie wird die konjugierte Hyperbel der gegebenen genannt. Man nennt überdies BB' die Nebenachse der gegebenen Hyperbel und dem entsprechend AA' die Nebenachse der konjugierten.

Fig. 42.



Konjugierte Hyperbeln haben dieselben Asymptoten und stehen in der Beziehung zu einander, dafs die Nebendurchmesser der einen die Hauptdurchmesser der andern sind.

Aufg. 1. Ist der zu der Geraden $2x - 7y + 1 = 0$ parallele Durchmesser der Hyperbel $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ ein Hauptdurchmesser oder ein Nebendurchmesser?

Aufg. 2. Berechne die numerische Exzentrizität der Hyperbel $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Aufg. 3. Beweise die Gleichungen:

$$a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}, \quad c = \frac{\varepsilon p}{\varepsilon^2 - 1},$$

wo p den Halbparameter bedeutet. (Vgl. § 41, Aufg. 6.)

Aufg. 4. Drücke b, c, p durch a und ε aus.

Aufg. 5. Welchen Wert hat ε für die gleichseitige Hyperbel? Welches ist die konjugierte Hyperbel?

Aufg. 6. Berechne den Asymptotenwinkel w aus der numerischen Exzentrizität. Man findet:

$$\sin \frac{w}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon}, \quad \cos \frac{w}{2} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \operatorname{tg} \frac{w}{2} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Zwei Hyperbeln mit derselben numerischen Exzentrizität haben daher gleiche Asymptotenwinkel, und umgekehrt.

Aufg. 7. Beweise, dafs zwei Hyperbeln mit derselben numerischen Exzentrizität einander ähnlich sind. Die Gleichheit der numerischen Exzentrizität zweier Hyperbeln ist die notwendige und hinreichende Bedingung für ihre Ähnlichkeit. (§ 41, Aufg. 5.)

Aufg. 8. Zeige, dafs es unendlich viele Hyperbeln mit denselben Asymptoten giebt, und dafs alle diese Hyperbeln einander ähnlich sind. Die Gleichheit der Asymptotenwinkel zweier Hyperbeln ist die notwendige und hinreichende Bedingung für ihre Ähnlichkeit.

Aufg. 9. Die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda$ stellt, wenn λ einen veränderlichen Parameter bedeutet, unendlich viele Hyperbeln dar. In welcher Beziehung stehen diese zu einander? Beachte insbesondere die Werte $\lambda = 0, \pm 1, \pm k, \infty$. Das Asymptotenpaar erscheint also als Grenzfall in diesem Hyperbelsysteme. (§ 54, Aufg. 10.)

Aufg. 10. Es sei r ein reeller Halbmesser einer Hyperbel und r' der dazu senkrechte reelle Halbmesser der konjugierten Hyperbel. Beweise die Gleichung $\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$ (§ 41).

Aufg. 11. Beweise, dafs die gemeinsamen Asymptoten zweier konjugierter Hyperbeln die Diagonalen des durch die Scheitel A, A', B, B' bestimmten Rechtecks sind.

Aufg. 12. Zeige, dafs die vier Brennpunkte zweier konjugierter Hyperbeln auf einem um O beschriebenen Kreise, dem sogenannten Exzentrizitätskreise, liegen.

Aufg. 13. Beweise mittels des Ausdrucks

$$\varrho^2\left(\frac{\cos^2 u}{a^2} - \frac{\sin^2 u}{b^2}\right) - 1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1,$$

dafs die Hyperbel alle Punkte der Ebene, für die

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$$

positiv ist, von denen trennt, für die dieser Ausdruck negativ ist. Zu welchen Gebieten gehören Mittelpunkt und Brennpunkte?

§ 56. Die Hyperbel und die Gerade.

Um die Schnittpunkte der Geraden

(1) $$y = \mu x + n$$

mit der Hyperbel

(2) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zu bestimmen, setze man den durch (1) gelieferten Wert von y in (2) ein. Man erhält dann die quadratische Gleichung:

(3) $$x^2(b^2 - a^2\mu^2) - 2\mu n a^2 x - a^2(b^2 + n^2) = 0.$$

Bezeichnet man ihre beiden Wurzeln mit x_1 und x_2 und berechnet aus (1) die zugehörigen y_1 und y_2, so folgt zunächst, dafs die Hyperbel, ebenso wie die Ellipse, von jeder Geraden in zwei Punkten geschnitten wird. Die Realität dieser Punkte hängt von dem Vorzeichen der Diskriminante ab, die sich in der Form $a^2b^2(n^2 + b^2 - a^2\mu^2)$ darstellt. Je nachdem dieser Ausdruck positiv, Null, oder negativ ist, sind die Wurzeln von (3) reell und verschieden, reell und zusammenfallend, oder imaginär.

Nehmen wir zunächst an, es sei $b^2 - a^2\mu^2 > 0$, d. h. $\mu^2 < \frac{b^2}{a^2}$. Dann ist die Gerade (1) einem Hauptdurchmesser parallel, und die Diskriminante zeigt, dafs dann allemal zwei

reelle und von einander verschiedene Schnittpunkte existieren. Sind ihre Abscissen x_1 und x_2, so folgt aus (3), dafs $x_1 x_2$ negativ ist, dafs also die Schnittpunkte auf verschiedenen Seiten der y-Achse liegen, d. h. dafs die Gerade beide Hyperbeläste trifft.

Ist $b^2 - a^2\mu^2 < 0$, d. h. $\mu^2 > \frac{b^2}{a^2}$, so läuft die Gerade (1) einem Nebendurchmesser parallel, und die Schnittpunkte sind reell und verschieden, reell und zusammenfallend, oder imaginär, je nachdem $n^2 \gtreqless a^2\mu^2 - b^2$ ist. Im ersten Falle liegen dann aber die beiden Schnittpunkte stets auf demselben Hyperbelaste, da, wie Gleichung (3) zeigt, das Produkt $x_1 x_2$ positiv ausfällt.

Ist endlich $b^2 - a^2\mu^2 = 0$, also $\mu^2 = \frac{b^2}{a^2}$, so ist die Gerade einer der beiden Asymptoten parallel. In diesem Falle reduziert sich die quadratische Gleichung (3) auf die lineare:

$$2\mu n x + b^2 + n^2 = 0, \tag{4}$$

die eine einzige Wurzel:

$$x = -\frac{b^2 + n^2}{2\mu n} \tag{5}$$

liefert.

Eine jede zu einer der Asymptoten parallele Gerade trifft daher scheinbar die Hyperbel nur in einem Punkte. Dieser rückt ins Unendliche, wenn aufser $b^2 - a^2\mu^2 = 0$ auch noch $n = 0$ ist, d. h. wenn die Gerade (1) mit einer der beiden Asymptoten zusammenfällt.

Man kann den durch $b^2 - a^2\mu^2 = 0$ charakterisierten Fall aber noch in anderer Weise deuten. Betrachtet man nämlich in einer quadratischen Gleichung $Ax^2 + 2Bx + C = 0$ die Koeffizienten A, B, C als veränderliche Grölsen und bringt die beiden Wurzeln

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{(-B + \sqrt{B^2 - AC})(-B - \sqrt{B^2 - AC})}{A(-B - \sqrt{B^2 - AC})}$$

und

$$x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{(-B - \sqrt{B^2 - AC})(-B + \sqrt{B^2 - AC})}{A(-B + \sqrt{B^2 - AC})}$$

auf die Form

$$x_1 = \frac{C}{-B - \sqrt{B^2 - AC}}, \quad x_2 = \frac{C}{-B + \sqrt{B^2 - AC}},$$

so erkennt man, daſs für $A = 0$ die Wurzel x_2 unendlich groſs wird, während x_1 den Wert $-\frac{C}{2B}$ annimmt. Wird auch noch $B = 0$, so erhält man auch für x_1 einen unendlich groſsen Wert, und es sind dann die beiden Wurzeln x_1 und x_2 einander gleich, da die Diskriminante $B^2 - AC$ für $A = B = 0$ verschwindet. Man kann dies so ausdrücken:

Verschwindet in der quadratischen Gleichung

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0$$

der Koeffizient A, während B von Null verschieden ist, so hat die quadratische Gleichung eine endliche und eine unendlich groſse Wurzel. Verschwinden A und B gleichzeitig, so sind beide Wurzeln einander gleich und unendlich groſs.

Wendet man diese Betrachtungen auf die quadratische Gleichung (3) für den Fall $b^2 - a^2\mu^2 = 0$ an, so erkennt man, daſs diese eine endliche und eine unendlich groſse Wurzel besitzt, so lange n von Null verschieden ist. Sobald aber $n = 0$ wird, werden beide Wurzeln einander gleich und unendlich groſs, d. h.:

Jede zu einer Asymptote parallele Gerade trifft die Hyperbel in einem im Endlichen gelegenen und in einem unendlich fernen Punkte. Die beiden Asymptoten selbst schneiden die Hyperbel in zwei zusammenfallenden unendlich fernen Punkten und sind die einzigen Geraden dieser Art.

Dem entsprechend hat man die im ersten und im dritten Quadranten und ebenso die im zweiten und im vierten Quadranten befindlichen Hyperbeläste als im unendlich fernen Punkte der betreffenden Asymptote zusammenhängend anzusehen. Die Hyperbel hat also zwei unendlich entfernte Punkte, und die beiden Asymptoten sind als die Tangenten der Hyperbel in diesen unendlich fernen Punkten zu betrachten, insofern eine jede von ihnen mit der Hyperbel zwei zusammenfallende Punkte gemein hat.

Aufg. 1. Man bestimme die Schnittpunkte der Geraden $7x - 3y + 2 = 0$ mit der Hyperbel $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{81} = 1$.

Aufg. 2. Welche Beziehung mufs zwischen A, B, C stattfinden, damit die Gerade $Ax + By + C = 0$ die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ berührt? Übertrage Aufg. 5 und 7, § 45, auf die Hyperbel.

Aufg. 3. Zeige, dafs der Ort der Schnittpunkte zu einander senkrechter Tangenten der mit dem Radius $\sqrt{a^2 - b^2}$ um den Mittelpunkt der Hyperbel beschriebene Kreis ist (§ 48, Aufg. 6).

Aufg. 4. Giebt es Tangenten, die einem Hauptdurchmesser parallel laufen?

Aufg. 5. Innerhalb welcher Grenzen bewegen sich die Richtungskoeffizienten sämtlicher Tangenten einer Hyperbel?

Aufg. 6. Ist $b^2 - a^2\mu^2 < 0$, so gehören zu jedem μ zwei parallele Tangenten, deren Gleichungen

$$y = \mu x \pm \sqrt{a^2\mu^2 - b^2}$$

sind. Ermittle ihre Berührungspunkte.

§ 57. Konjugierte Durchmesser.

Angenommen die Gerade

(1) $$y = \mu x + n$$

treffe die Hyperbel

(2) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

in zwei reellen Punkten P_1 und P_2 mit den Abscissen x_1 und x_2. Diese sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

(3) $$x^2(b^2 - a^2\mu^2) - 2\mu n a^2 x - a^2(b^2 + n^2) = 0,$$

und man erhält daher für die Abscisse x des Mittelpunktes der Sehne P_1P_2:

(4) $$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\mu n a^2}{b^2 - a^2\mu^2}.$$

Setzt man diesen Wert in (1) ein, so ergiebt sich die Ordinate des Mittelpunktes von P_1P_2, nämlich:

(5) $$y = \frac{nb^2}{b^2 - a^2\mu^2}.$$

Aus (5) und (4) folgt aber durch Division:

(6) $$y = \frac{b^2}{\mu a^2} x,$$

eine Gleichung, die n nicht mehr enthält und die folglich zwischen den Koordinaten des Mittelpunktes einer jeden zur Geraden (1) parallelen Sehne besteht. Da aber (6) einen Durchmesser darstellt, so gilt der Satz:

I. Die Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Hyperbel liegen auf einem Durchmesser.

Setzen wir $\mu = \operatorname{tg}\alpha$, $\frac{b^2}{\mu a^2} = \operatorname{tg}\beta$, so besteht also zwischen den Richtungskoeffizienten der parallelen Sehnen einerseits und des Ortes ihrer Mittelpunkte andererseits die Beziehung:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2}, \tag{7}$$

oder:

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2} = 0. \tag{8}$$

Die Symmetrie dieser Gleichungen in Bezug auf α und β lehrt, daſs, wenn die parallelen Sehnen unter dem Winkel β gegen die x-Achse geneigt sind, umgekehrt der Neigungswinkel des sie halbierenden Durchmessers gleich α sein muſs. Zwei Durchmesser, deren Richtungskoeffizienten der Gleichung (7) genügen, heiſsen konjugierte Durchmesser. Da zu jedem Durchmesser aus (7) ein konjugierter gefunden werden kann, so folgt:

II. Es giebt unendlich viele Paare von Durchmessern, in Bezug auf die die Hyperbel in dem Sinne symmetrisch ist, daſs jeder der beiden Durchmesser eines solchen Paares die Sehnen halbiert, die dem andern parallel sind. Das Produkt der Richtungskoeffizienten zweier konjugierter Durchmesser ist konstant.

Da $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\beta$ immer dasselbe Zeichen haben, so sind α und β entweder beide spitz oder beide stumpf. Für $\alpha = 0$ ist $\beta = 90^0$; wächst α, so nimmt β ab. Solange $\operatorname{tg}\alpha < \frac{b}{a}$ ist, muſs $\operatorname{tg}\beta > \frac{b}{a}$ sein; wird $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, so wird auch $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$, d. h.:

III. Zwei konjugierte Durchmesser durchschneiden stets denselben Quadranten. Ist der eine ein Haupt-

durchmesser, so ist der andere ein Nebendurchmesser; dreht sich der eine im positiven Sinne, so kommt ihm der andere im negativen Sinne entgegen. Die Hauptachse und die Nebenachse sind die einzigen auf einander senkrecht stehenden konjugierten Durchmesser. Jede Asymptote ist aufzufassen als ein Paar zusammengefallener konjugierter Durchmesser.

Aufg. 1. Konstruiere die Achsen einer gezeichnet vorliegenden Hyperbel (§ 43).

Aufg. 2. Beachte, dafs sich bei der Hyperbel zwei Paare konjugierter Durchmesser gegenseitig nicht trennen, während dies bei der Ellipse stets der Fall ist.

Aufg. 3. Bei der Ellipse gab es einen Spezialfall, den Kreis, bei dem je zwei konjugierte Durchmesser auf einander senkrecht stehen. Existiert ein solcher Spezialfall auch für die Hyperbel?

Aufg. 4. Es sei (x_1, y_1) ein Punkt der Hyperbel, also $xy_1 - yx_1 = 0$ die Gleichung des zugehörigen Durchmessers. Beweise, dafs der konjugierte Durchmesser die Gleichung

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 0$$

besitzt. Bestimme hieraus die Koordinaten seiner Schnittpunkte mit der konjugierten Hyperbel. Man findet $\pm \frac{a}{b} y_1$ und $\pm \frac{b}{a} x_1$.

Aufg. 5. Es seien a' und b' zwei konjugierte Halbmesser. Um die Vorstellungen zu fixieren, nehmen wir an, sie seien beide im ersten Quadranten gelegen. Sind dann x_1, y_1 die Koordinaten des Endpunktes von a', so sind (Aufg. 4) $\frac{a}{b} y_1$, $\frac{b}{a} x_1$ die Koordinaten des Endpunktes von b'. Beweise hieraus die Relation $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$ (vgl. § 48).

Aufg. 6. Beweise, dafs der Inhalt des durch a' und b' bestimmten Dreiecks gleich $\frac{1}{2} ab$, also konstant ist.

Aufg. 7. Der von a' und b' eingeschlossene Winkel — der sogenannte Konjugationswinkel — sei ω. Zeige, dafs

$$a'b' \sin \omega = ab$$

ist.

Aufg. 8. Zeige, dafs, wenn a' wächst, auch b' wachsen mufs, und dafs dann der Konjugationswinkel abnimmt. In den Asymptoten fallen a' und b' zusammen; ω ist dann Null, und a' und b' sind unendlich grofs.

Aufg. 9. Giebt es auch bei der Hyperbel gleich grofse konjugierte Durchmesser?

Aufg. 10. Zeige, dafs die Asymptoten der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ zusammenfallen mit den beiden gleichen konjugierten Durchmessern der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (§ 48).

Aufg. 11. Löse die Aufgaben 4 bis 10 speziell für die gleichseitige Hyperbel. Zeige, dafs für diese stets $\alpha + \beta = 90^0$ ist.

§ 58. Die Gleichung der Hyperbel, bezogen auf zwei konjugierte Durchmesser als schiefwinklige Koordinatenachsen.

Unter dem Winkel α gegen die x-Achse werde ein Hauptdurchmesser gezogen. Seine Länge sei $2a'$. Der unter dem Winkel β gegen die x-Achse geneigte konjugierte Nebendurchmesser hat dann ebenfalls eine bestimmte Länge $2b'$, und es ist (§ 55):

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{1}{a'^2}, \tag{1}$$

$$-\left(\frac{\cos^2\beta}{a^2} - \frac{\sin^2\beta}{b^2}\right) = \frac{1}{b'^2}. \tag{2}$$

Wählt man jetzt die beiden Durchmesser als x'-Achse und y'-Achse eines neuen, schiefwinkligen Koordinatensystemes, so erhält man genau durch dieselbe Rechnung wie bei der Ellipse:

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1, \tag{3}$$

als Gleichung der Hyperbel, bezogen auf die konjugierten Durchmesser $2a'$ und $2b'$.

Aufg. Beweise, dafs für die gleichseitige Hyperbel, wegen $a = b$, $\alpha + \beta = 90^0$, $a' = b'$, stets die Gleichung

$$x'^2 - y'^2 = a'^2$$

gilt, für je zwei konjugierte Durchmesser als Koordinatenachsen.

§ 59. Die Tangente in einem Punkte der Hyperbel.

Die auf die beiden konjugierten Durchmesser $2a'$ und $2b'$ bezogene Gleichung der Hyperbel sei

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1. \tag{1}$$

Betrachten wir, wie früher, die Tangente in einem Punkte P_1 der Hyperbel als die Grenzlage der Sekante P_1P_2, wenn P_2 mit P_1 zusammengefallen ist, so erhalten wir genau durch dieselbe Rechnung, die wir bei der Ellipse ausführlich entwickelt haben, indem wir nur überall b'^2 mit $-b'^2$ vertauschen, als Gleichung der Tangente im Punkte P_1:

$$\frac{xx_1}{a'^2} - \frac{yy_1}{b'^2} = 1. \tag{2}$$

Aufg. 1. Bringe die auf die Hauptachse bezogene Tangentengleichung $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ auf die Normalform. Berechne den Abstand des Mittelpunktes und der Brennpunkte von der Tangente.

Aufg. 2. Bestimme die Achsenabschnitte der Tangente $\frac{xx_1}{a'^2} - \frac{yy_1}{b'^2} = 1$.

Aufg. 3. Führe die ganze im § 56 besprochene Untersuchung durch, unter Voraussetzung der auf konjugierte Durchmesser bezogenen Gleichung $\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$ der Hyperbel. Zeige insbesondere, dafs für $b'^2 - a'^2\mu^2 = 0$ die Gerade $y = \mu x + n$ die Hyperbel in einem im Endlichen und in einem im Unendlichen gelegenen Punkte trifft. Leite daraus weiter ab, dafs die Asymptoten in Bezug auf jedes Paar konjugierter Durchmesser die Gleichungen besitzen:

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} = 0.$$

Aufg. 4. Transformiere (§ 58) die auf rechtwinklige Achsen bezogenen Asymptotengleichungen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

auf die konjugierten Durchmesser $2a'$ und $2b'$ und verifiziere dadurch die letzte Behauptung der vorhergehenden Aufgabe.

Aufg. 5. Beachte, dafs sich das Produkt der beiden Asymptotengleichungen in der Form $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ darstellt und dafs daher die in der vorhergehenden Aufgabe geforderte Transformation schon im § 58 gelöst ist.

Aufg. 6. Beweise, dafs die Asymptoten die Diagonalen des Parallelogrammes sind, das man erhält, wenn man durch die Endpunkte zweier konjugierter Durchmesser Parallelen zu diesen zieht (Verallgemeinerung von Aufg. 11, § 55).

Aufg. 7. Von einer Hyperbel kennt man, nach Lage und Gröfse, zwei konjugierte Durchmesser $2a'$ und $2b'$. Konstruiere die Asymptoten und die Achsen.

Aufg. 8. Bringe die Gleichung der Tangente auf die Form $y = \frac{b'}{a'} x \sqrt{1 + \frac{b'^2}{y_1^2}} - \frac{b'^2}{y_1}$ und leite daraus die Gleichungen der beiden Asymptoten (als Tangenten der beiden unendlich fernen Punkte) ab.

§ 60. Tangenten und Durchmesser.

Ersetzt man in dem gleichnamigen, auf die Ellipse bezüglichen Paragraphen 46 überall b'^2 durch $-b'^2$, so wird man genau durch dieselbe Rechnung zu den folgenden Sätzen geführt:

I. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser und folglich auch einander parallel.

II. Zwei beliebige Tangenten der Hyperbel treffen sich stets in einem Punkte des Durchmessers, der die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte halbiert.

Benutzt man die gleiche Bezeichnung wie in § 46, so lehrt auch bei der Hyperbel die Gleichung $OT_1 = \frac{a'^2}{x_1}$, dafs die Punkte Q, Q', M_1, T_1 harmonische Punkte sind.

III. Die zu irgend einem Paare Supplementarsehnen parallelen Durchmesser sind konjugiert.

IV. Die Diagonalen eines jeden der Hyperbel umgeschriebenen Parallelogrammes sind konjugierte Durchmesser.

Dabei ist unter einem umgeschriebenen Parallelogramme ein solches zu verstehen, dessen Seiten die Hyperbel berühren.

Bezieht man endlich die Hyperbel auf einen beliebigen Durchmesser $2a'$ als x-Achse und die in dem einen Endpunkte von $2a'$ konstruierte Tangente als y-Achse, so ergiebt sich, wie bei der Ellipse, indem man in der Hyperbelgleichung y ungeändert läfst und x durch $x + a'$ ersetzt, die Gleichung:

$$y^2 = 2\frac{b'^2}{a'}x + \frac{b'^2}{a'^2}x^2. \tag{1}$$

Für den Fall rechtwinkliger Koordinaten hat man $a' = a$, $b' = b$, $\frac{b^2}{a} = p$. Man erhält daher als Scheitelgleichung:

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2. \tag{2}$$

Aufg. 1. Ist δ der Abstand des Mittelpunktes 0 von der Tangente im Punkte P, ist ferner $OP = a'$ und der konjugierte Halbmesser $OQ = b'$, so ergiebt sich aus dem Dreiecke OPQ (§ 57, Aufg. 6) die Relation: $\delta = \frac{ab}{b'}$. Beweise hieraus den in § 56, Aufg. 3 enthaltenen Satz.

Aufg. 2. Konstruiere in den Endpunkten eines Durchmessers die Tangenten an die Hyperbel und in den Endpunkten des konjugierten Durchmessers die Tangenten an die konjugierte Hyperbel und zeige, dafs das so entstehende Parallelogramm konstanten Inhalt hat.

§ 61. Die Asymptoten als Koordinatenachsen.

Von den beiden symmetrisch zu den Achsen gelegenen Asymptoten der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

schliefse die durch den ersten Quadranten gehende mit der x-Achse den Winkel φ ein; dann bildet die andere Asymptote mit der x-Achse den Winkel $-\varphi$. Wählt man diese Asymptote zur x'-Achse und jene zur y'-Achse eines schiefwinkligen Koordinatensystemes, so gelten für den Übergang von dem alten rechtwinkligen zu dem neuen schiefwinkligen Systeme die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} x &= (x' + y')\cos\varphi \\ y &= (-x' + y')\sin\varphi, \end{aligned} \tag{2}$$

die man erhält, wenn man in den entsprechenden Formeln von § 15 α und β durch $-\varphi$ und φ ersetzt. Führt man aber (2) in (1) ein und berücksichtigt die Gleichungen

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{c}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{c},$$

so erhält man die auf die Asymptoten, als Koordinatenachsen, bezogene Gleichung der Hyperbel:

$$\text{(4)} \qquad x'y' = \frac{c^2}{4}.$$

Das System der beiden Asymptoten ist im allgemeinen ein schiefwinkliges; nur bei der gleichseitigen Hyperbel ist es rechtwinklig.

Aufg. 1. Für den Asymptotenwinkel $w = 2\varphi$ ist $\sin w = \frac{2ab}{c^2}$. Beweise daraus, dafs der Flächeninhalt des Parallelogrammes, das ein beliebiger Hyperbelpunkt mit den beiden Asymptoten bestimmt, konstant und gleich $\frac{ab}{2}$ ist.

Aufg. 2. Beweise aus (4), dafs sich die Hyperbel den Asymptoten immer mehr und mehr nähert, ohne sie je zu erreichen.

Aufg. 3. Wende die Gleichungen (2) auf $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ an. Man erhält alsdann $\frac{x'}{2x_1'} + \frac{y'}{2y_1'} = 1$ als Tangentengleichung, bezogen auf die Asymptoten, insofern x', y'; x_1', y_1' die neuen Koordinaten der Punkte x, y; x_1, y_1 bedeuten.

Aufg. 4. Zeige, dafs die Gleichung

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{d}{c}}$$

eine Hyperbel darstellt, deren Asymptoten den Koordinatenachsen parallel sind. Beachte sodann § 4, Aufg. 5.

§ 62. Beziehungen zwischen den Sehnen und Tangenten einer Hyperbel und ihren Asymptoten.

Die auf die Asymptoten bezogene Gleichung der Hyperbel sei:

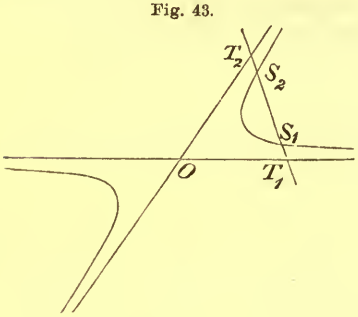
$$\text{(1)} \qquad xy = \frac{c^2}{4}.$$

Um die Schnittpunkte der Geraden

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \tag{2}$$

mit der Hyperbel zu bestimmen, berechne man aus (1) etwa y und führe diesen Wert in (2) ein. Man gelangt dann zu der quadratischen Gleichung

Fig. 43.



$$4qx^2 - 4pqx + c^2p = 0, \tag{3}$$

deren Diskriminante gleich $4pq(pq - c^2)$ ist.

Die Wurzeln und damit auch die Schnittpunkte der Geraden mit der Hyperbel sind daher immer reell und von einander verschieden, sobald p und q entgegengesetzte Zeichen haben oder sobald, bei gleichen Zeichen von p und q, das Produkt $pq > c^2$ ist.

Bezeichnet man für diesen Fall die beiden reellen Schnittpunkte mit S_1 und S_2, ihre Koordinaten mit x_1, y_1 und x_2, y_2, so erhält man aus (3) für die Koordinaten $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ des Mittelpunktes der Sehne S_1S_2 die Werte:

$$x = \frac{p}{2}, \quad y = \frac{q}{2}. \tag{4}$$

Dies sind aber auch die Koordinaten des Mittelpunktes des zwischen den Koordinatenachsen, d. h. den Asymptoten, befindlichen Stückes der Geraden (2), und es gilt daher der Satz:

I. Schneidet eine Gerade die Hyperbel in den Punkten S_1, S_2 und ihre Asymptoten in den Punkten T_1, T_2, so ist der Mittelpunkt der Sehne S_1S_2 zugleich der Mittelpunkt des Segmentes T_1T_2, und es ist daher $S_1T_1 = S_2T_2$ und $S_1T_2 = S_2T_1$.

Dieser Satz gestattet eine einfache Konstruktion der Hyperbel, wenn man ihre Asymptoten und einen Hyperbelpunkt S_1 kennt. Man ziehe nämlich durch S_1 eine beliebige Gerade, die die Asymptoten in T_1 und T_2 treffen möge, und trage S_1T_1 von T_2 aus auf der Geraden ab. Indem man dies be-

liebig oft wiederholt, erhält man beliebig viele Punkte der Hyperbel, von denen natürlich jeder wieder in der gleichen Weise benutzt werden kann wie S_1.

Ist in (3) $pq = c^2$, so fallen die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 zusammen, und die Gerade (2) wird zur Tangente. Aus (3) und (2) ergeben sich dann für die Tangente mit den Achsenabschnitten p, q die Koordinaten des Berührungspunktes:

$$x = \frac{p}{2}, \quad y = \frac{q}{2}, \tag{5}$$

die man natürlich auch aus (4) hätte entnehmen können. Man hat daher den Satz, der als spezieller Fall von I angesehen werden kann:

II. Das zwischen den Asymptoten befindliche Stück einer Hyperbeltangente wird im Berührungspunkte halbiert.

Aus (5) erhält man auch sofort die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1). Da nämlich die Achsenabschnitte $2x_1$ und $2y_1$ sein müssen, so lautet diese Gleichung:

$$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1 \quad (\S\ 61, \text{ Aufg. } 3). \tag{6}$$

Da die Achsenabschnitte p und q einer Tangente stets das konstante Produkt $pq = 4x_1y_1 = c^2$ ergeben, so folgt:

III. Jede Tangente einer Hyperbel bestimmt mit den Asymptoten ein Dreieck von dem konstanten Inhalte ab.

Der Inhalt eines solchen Dreiecks ist nämlich:

$$\tfrac{1}{2}pq \sin w = \tfrac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{2ab}{c^2} = ab,$$

insofern w den Asymptotenwinkel bedeutet (§ 61, Aufg. 1).

Aufg. 1. Konstruiere im Punkte (x_1, y_1) der Hyperbel die Tangente mittels der Relationen $2x_1 = p$, $2y_1 = q$.

Aufg. 2. Eine Gerade bewege sich so, daſs das Dreieck, das sie mit den Schenkeln eines festen Winkels bildet, konstanten Inhalt hat. Welchen Ort beschreibt der Mittelpunkt der in Bewegung befindlichen Dreiecksseite?

Aufg. 3. Von einer Hyperbel kennt man eine Asymptote und drei Punkte. Man soll die Hyperbel und die andere

Asymptote konstruieren, indem man auf die durch die drei Punkte bestimmten Sehnen den Satz I anwende.

Aufg. 4. Beweise mit Hülfe von § 59, Aufg. 6, dafs das zwischen den Asymptoten befindliche Stück einer Tangente gleich dem zu dieser Tangente parallelen Durchmesser ist.

Aufg. 5. Beweise, dafs die Koordinaten des Mittelpunktes einer zu dem Durchmesser $y=\mu x$ parallelen Sehne gleich $-\frac{n}{2\mu}$ und $\frac{n}{2}$ sind, und zeige daraus, dafs $y=-\mu x$ der zu $y=\mu x$ konjugierte Durchmesser ist. Insbesondere sind $y=x$ und $y=-x$ die Gleichungen der Achsen.

Aufg. 6. Beweise, dafs sich die Tangenten in den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) in dem Punkte $\left(\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}, \frac{2y_1y_2}{y_1+y_2}\right)$ treffen und dafs dieser auf dem die Berührungssehne halbierenden Durchmesser liegt.

Aufg. 7. Eine Gerade $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ bewege sich so, dafs sie fortwährend die Hyperbel $xy=\frac{c^2}{4}$ berühre. Welchen Ort beschreibt der Punkt P, der das zwischen den Asymptoten befindliche Stück T_1T_2 der beweglichen Tangente in dem konstanten Verhältnisse $\frac{T_1P}{PT_2}=\lambda$ teilt?

Aufg. 8. Zwei Hyperbeln mögen dieselben Asymptoten, aber verschiedene Exzentrizitäten c besitzen. Ihre auf die gemeinsamen Asymptoten bezogenen Gleichungen seien:

$$xy=\frac{c_1^2}{4} \quad \text{und} \quad xy=\frac{c_2^2}{4}.$$

Ein beliebiger Durchmesser treffe die erste Hyperbel in P_1, die zweite in P_2, dann sind die Tangenten in P_1 und P_2 parallel. (Vergl. § 55, Aufg. 8.)

Aufg. 9. Bestimme die Koordinaten der Brennpunkte und der Scheitel der Hyperbel $xy=\frac{c^2}{4}$, wenn der Asymptotenwinkel gleich w ist. Drücke a und b durch c und w aus.

Aufg. 10. Von einer Hyperbel kennt man die Asymptoten und die auf sie bezogenen Koordinaten eines ihrer Punkte. Man bestimme die Gleichung der Hyperbel und die Gröfsen a und b.

Aufg. 11. Beweise aus der Gleichung $pq = c^2$, dafs jeder durch die beiden Brennpunkte einer Hyperbel gehende Kreis die Asymptoten in den Schnittpunkten zweier Hyperbeltangenten trifft. Zeige, dafs dieselbe Eigenschaft auch jedem Kreise zukommt, dessen Mittelpunkt auf der Hauptachse liegt und der den Exzentrizitätskreis (§ 55, Aufg. 12) rechtwinklig schneidet (vorausgesetzt natürlich, dafs er die Asymptoten überhaupt trifft).

Aufg. 12. Beweise aus der Gleichung $pq = c^2$, dafs die beiden Doppelverhältnisse der Schnittpunkte von vier beliebigen Hyperbeltangenten mit den beiden Asymptoten stets einander gleich sind. Harmonischen Schnittpunkten mit der einen Asymptote entsprechen also auch harmonische mit der anderen (§ 4, Aufg. 5). Ziehe die entsprechenden Schlüsse aus der Gleichung $xy = \frac{c^2}{4}$.

§ 63. Pol und Polare.

Die auf zwei konjugierte Durchmesser $2a'$ und $2b'$ bezogene Gleichung der Hyperbel lautet:

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Genau wie bei der Ellipse (§ 49) und genau durch dieselbe Rechnung (indem man nur überall $-b'^2$ statt b'^2 schreibt) findet man den Satz:

I. Zieht man von einem beliebigen Punkte Strahlen nach einer Hyperbel und bestimmt jedesmal zu den beiden Schnittpunkten und dem gegebenen Punkte, als zugeordnetem, den vierten harmonischen Punkt, so ist der Ort dieser vierten harmonischen Punkte eine gerade Linie.

Die Gleichung dieser Geraden lautet:

$$\frac{xx_1}{a'^2} - \frac{yy_1}{b'^2} = 1.$$

Sie heifst die Polare des gegebenen Punktes, dieser der Pol der Geraden.

Bezeichnet man einen beliebigen Punkt der Ebene als aufserhalb der Hyperbel liegend, wenn man durch ihn Geraden

ziehen kann, die die Hyperbel nicht treffen, dagegen innerhalb der Hyperbel, wenn keine solchen Geraden gezogen werden können, so gelten genau dieselben Betrachtungen und alle die Sätze, die wir in den Paragraphen 49 und 50 für die Ellipse hergeleitet haben, in unveränderter Weise auch für die Hyperbel. Wir empfehlen dem Leser, als eine nützliche Übung, alle diese Sätze für die Hyperbel von neuem abzuleiten und namentlich auch die in den betreffenden Paragraphen befindlichen Aufgaben auf die Hyperbel anzuwenden.

Hier möge nur noch der folgende Satz erwähnt werden:

II. Die Polare eines Punktes einer Asymptote ist dieser parallel; sie fällt mit ihr zusammen, wenn der Punkt der unendlich ferne Punkt der Asymptote ist.

Aufg. 1. Man konstruiere mit Hülfe des vollständigen Vierecks zu einem gegebenen Punkte die Polare in Bezug auf eine gegebene Hyperbel.

Aufg. 2. Man konstruiere zu einer gegebenen Geraden den Pol und berechne auch seine Koordinaten aus den zugehörigen Gleichungen $Ax + By + C = 0$ und $\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$.

Aufg. 3. Man beweise durch direkte Rechnung die Richtigkeit von Satz II. Man hat zu diesem Zwecke nur zu zeigen, dafs der Richtungskoeffizient der Polaren von (x_1, y_1) gleich $\pm \frac{b}{a}$ ist, sobald $y_1 = + \frac{b}{a} x_1$ ist.

§ 64. Brennpunktseigenschaften.

Für die zu einem beliebigen Punkte der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

gehörigen Brennstrahlen r und r' hatten wir gefunden:

$$r^2 = (c - x)^2 + y^2, \quad r'^2 = (c + x)^2 + y^2. \tag{2}$$

Durch Subtraktion folgt:

$$(r' + r)(r' - r) = 4cx,$$

und da $r' - r = 2a$ ist:

$$r' + r = 2\frac{c}{a} x = 2\varepsilon x,$$

wo ε die numerische Exzentrizität bedeutet.

Aus $r' + r = 2\varepsilon x$ und $r' - r = 2a$ ergiebt sich dann:

$$r = \varepsilon x - a, \quad r' = \varepsilon x + a. \tag{3}$$

Durch Multiplikation von r und r' erhält man:

$$rr' = \varepsilon^2 x^2 - a^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 - a^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} + x^2 - a^2,$$

oder mit Berücksichtigung der Hyperbelgleichung:

$$rr' = \frac{b^2 x^2}{a^2} + \frac{a^2 y^2}{b^2}. \tag{4}$$

Aus § 57, Aufg. 5, folgt aber, dafs die rechte Seite gleich b'^2 ist, wenn b' der zu OP konjugierte Halbmesser ist.

Wir erhalten daher, wie bei der Ellipse, die Gleichung:

$$rr' = b'^2, \tag{5}$$

d. h.: I. Das Produkt der Brennstrahlen eines Punktes ist gleich dem Quadrate des zu dem Punkte gehörigen konjugierten Halbmessers.

Um die Abstände $d = FG$ und $d' = F'G'$ (Fig. 44) der Brennpunkte von der Tangente im Punkte (x_1, y_1) zu ermitteln, hat man die Tangentengleichung

$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1$$

auf die Normalform zu bringen und dann die Koordinaten der Brennpunkte einzuführen. Man erhält:

$$d = -\frac{\frac{c x_1}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} = -b\,\frac{\varepsilon x_1 - a}{\sqrt{\frac{b^2 x_1^2}{a^2} + \frac{a^2 y_1^2}{b^2}}},$$

$$d' = -\frac{-\frac{c x_1}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} = +b\,\frac{\varepsilon x_1 + a}{\sqrt{\frac{b^2 x_1^2}{a^2} + \frac{a^2 y_1^2}{b^2}}},$$

oder mit Rücksicht auf (3), (4) und (5):

$$d = -\frac{br}{b'}, \quad d' = +\frac{br'}{b'}, \tag{6}$$

wenn r und r' die Brennstrahlen des Berührungspunktes und b' der zugehörige konjugierte Halbmesser sind. Daraus folgt zunächst mit Berücksichtigung von (5):

$$dd' = -b^2, \tag{7}$$

in Worten:

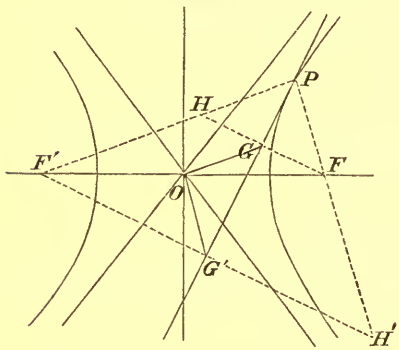
II. Das Produkt der Abstände der Brennpunkte von einer Tangente der Hyperbel ist konstant und zwar gleich dem Quadrate der halben Nebenachse.

Das negative Vorzeichen deutet an, dafs die Brennpunkte immer auf verschiedenen Seiten der Tangente liegen, während sie sich bei der Ellipse stets auf derselben Seite befinden. Aus (6) folgt weiter (indem man nur noch die absoluten Längen in Betracht zieht):

$$\frac{d}{r} = \frac{d'}{r'}. \tag{8}$$

Daraus folgt aber die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke PFG und $PF'G'$ und mithin die Gleichheit der Winkel FPG und $F'PG'$, d. h.:

Fig. 44.



III. Die Tangente halbiert den Winkel der beiden Brennstrahlen.

Die in P auf der Tangente errichtete Senkrechte heifst die Normale der Hyperbel im Punkte P. Sie halbiert den Nebenwinkel der beiden Brennstrahlen (vergl. § 51).

Wie bei der Ellipse zeigt jetzt eine einfache planimetrische Überlegung, dafs die Gegenpunkte H und H', die man erhält, wenn man FG und $F'G'$ um sich selbst verlängert, auf den Brennstrahlen von P oder ihren Verlängerungen liegen, woraus man leicht erhält:

$$F'H = FH' = 2a, \tag{9}$$

d. h.: IV. Der Ort der Gegenpunkte eines jeden der beiden Brennpunkte in Bezug auf eine bewegliche Tangente ist der mit dem Radius $2a$ um den andern Brennpunkt beschriebene Kreis.

Ebenso findet man, wie bei der Ellipse, dafs OG und OG' zu $F'H$ und FH' parallel und folglich gleich a sind. Man hat daher den Satz:

V. Der Ort der Fufspunkte der Lote, die man von den beiden Brennpunkten auf die sämtlichen Tangenten einer Hyperbel fällen kann, ist der mit dem Radius a um den Mittelpunkt der Hyperbel beschriebene Kreis. Oder auch: Die Hyperbel wird umhüllt

von dem einen Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel einen festen Kreis durchläuft, während der andere Schenkel durch einen aufserhalb gelegenen festen Punkt hindurchgeht.

Aufg. 1. Beachte, dafs die Gleichung $r' - r = 2a$ den Brennstrahlen r und r' Vorzeichen zuweist, wie auch die Gleichungen (3) zeigen. Diskutiere mit Rücksicht hierauf die Gleichungen (6) und beachte § 14.

Aufg. 2. Leite die Gleichung der Normalen ab und zeige, dafs die Gleichungen (12), (13), (14) von § 51 auch für die Hyperbel gelten. Beweise hieraus Satz III.

Aufg. 3. Konstruiere in einem Punkte der Hyperbel Tangente und Normale.

Aufg. 4. Konstruiere von einem Punkte aufserhalb der Hyperbel die Tangenten mit Hülfe der Gegenpunkte.

Aufg. 5. Diskutiere die übrigen Aufgaben von § 51 für die Hyperbel, insbesondere Aufg. 12.

Aufg. 6. Beweise, dafs der Abstand eines Brennpunktes von einer Asymptote gleich b ist (spezieller Fall von II).

Aufg. 7. Beweise, dafs sich eine Ellipse und eine Hyperbel, die dieselben Brennpunkte haben (konfokal sind), rechtwinklig schneiden, d. h. dafs in einem Schnittpunkte die Tangente der einen Kurve die Normale der anderen ist.

§ 65. Die Direktrix.

Man nennt die Polare eines Brennpunktes eine Direktrix oder Leitlinie der Hyperbel. Ihre Gleichung erhält man aus

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

indem man $x_1 = c$, $y_1 = 0$ setzt. Dies giebt:

$$x = \frac{a^2}{c}. \tag{1}$$

In gleicher Weise existiert für den andern Brennpunkt eine Direktrix mit der Gleichung $x = -\frac{a^2}{c}$.

Die Direktrix des Brennpunktes F ist also, ebenso wie die von F', eine Gerade, die im Abstande $\frac{a^2}{c} = \frac{a}{\varepsilon}$ vom Mittelpunkte auf der Hauptachse senkrecht steht.

Berechnet man für einen beliebigen Hyperbelpunkt P den Abstand PF von dem Brennpunkte F und den Abstand PQ von der zugehörigen Direktrix, so erhält man:

$$PF = r = \varepsilon x - a,$$

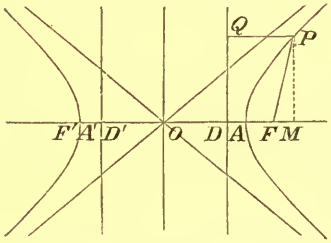
$$PQ = x - \frac{a}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon x - a),$$

folglich:

$$\frac{PF}{PQ} = \varepsilon, \tag{2}$$

d. h.: I. Das Verhältnis der Abstände eines Punktes der Hyperbel von einem Brennpunkte und der zugehörigen Direktrix ist konstant und zwar gleich der numerischen Exzentrizität.

Fig. 45.



Dieses Verhältnis ist also bei der Hyperbel stets gröfser als 1, während es bei der Ellipse kleiner als 1 war.

Für einen beliebigen Punkt (x_1, y_1) der zu F gehörigen Direktrix erhält man, wegen $x_1 = \frac{a^2}{c}$, als Gleichung der Polaren:

$$\frac{x}{c} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Durch Vergleichung des Richtungskoeffizienten dieser Polaren mit dem Richtungskoeffizienten der Verbindungslinie der Punkte (x_1, y_1) und F findet man, wie bei der Ellipse, den Satz:

II. Die Verbindungslinie eines Brennpunktes mit dem Pole einer beliebigen durch ihn hindurchgehenden Sehne steht senkrecht auf dieser. Oder auch: Das zwischen dem Berührungspunkte und der Direktrix gelegene Stück einer Tangente wird von dem zugehörigen Brennpunkte aus unter einem rechten Winkel gesehen.

Aufg. 1. Bestimme die Direktrix der gleichseitigen Hyperbel.

Aufg. 2. Konstruiere mit Hülfe von II die beiden Tangenten, die man von einem Punkte der Direktrix an die Hyperbel legen kann.

Aufg. 3. Von einer Hyperbel sind gegeben ein Brennpunkt, die zugehörige Direktrix und die numerische Exzentri-

zität ε. Man soll daraus die Hyperbel konstruieren (§ 55, Aufg. 3).

Aufg. 4. Konstatiere, dafs für einen der Hyperbel nicht angehörigen Punkt das Verhältnis der Abstände von einem Brennpunkte und der zugehörigen Direktrix ein anderes ist als für die Hyperbelpunkte.

Aufg. 5. Zeige, dafs die in § 52, Aufg. 4 gegebene Konstruktion auch für die Hyperbel gilt.

Sechstes Kapitel.

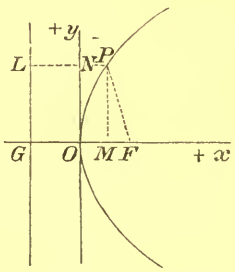
Die Parabel.

§ 66. Definition und Gleichung der Parabel.

Die Parabel ist der Ort der Punkte, die von einem gegebenen Punkte und einer gegebenen Geraden gleiche Abstände haben.

Der gegebene Punkt heifst der Brennpunkt, die gegebene Gerade die Direktrix oder Leitlinie der Parabel.

Fig. 46.



Um die Gleichung der Parabel abzuleiten, wähle man die Mitte des von dem Brennpunkte F auf die Direktrix gefällten Lotes $FG = p$ zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystemes und die Richtung von OF als die positive Richtung der x-Achse. Die Abscissen von F und G sind dann $\frac{p}{2}$ und $-\frac{p}{2}$. Sei nun der Punkt P mit den Koordinaten x, y gleich weit von dem Brennpunkte und der Direktrix entfernt, also $PF = PL$, dann folgt aus der Figur:

$$PF^2 = FM^2 + MP^2 = \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2$$

und:

$$PL = PN + NL = x + \frac{p}{2},$$

also:

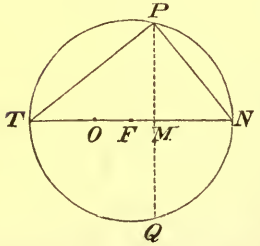
$$\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

oder:

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

Dies ist die Gleichung der Parabel. Sie wird durch die Koordinaten (0, 0) des Anfangspunktes befriedigt; die Parabel geht also durch O hindurch, wie auch aus der Definition unmittelbar folgt. Da sich ferner nur für positive x reelle y aus der Gleichung ergeben, so liegt die Kurve ganz auf der rechten Seite der y-Achse. Jedem positiven x aber entsprechen zwei entgegengesetzt gleiche y, d. h. die Parabel liegt symmetrisch zur x-Achse. Diese Symmetrieachse wird die Achse, ihr Anfangspunkt O der Scheitel der Parabel genannt. Wächst x über alle Grenzen, so wird auch y unendlich grofs. Für $x = \frac{p}{2}$ erhalten wir aus der Parabelgleichung die beiden zum Brennpunkte gehörigen Ordinaten $y = \pm p$. Wie bei der Ellipse und der Hyperbel bezeichnet man p als den Halbparameter der Parabel. Dieser Halbparameter p, der zugleich die Entfernung des Brennpunktes von der Direktrix angiebt, bestimmt vollständig die Gestalt der Parabel.

Fig. 47.



Aus der Gleichung $y^2 = 2px = 2x \cdot p$ folgt, dafs y immer mittlere Proportionale zu $2x$ und p ist. Dies führt zu einer einfachen Konstruktion der Parabel. Trägt man nämlich die Abscisse $OM = x$ von O aus nach links ab, sodafs $MT = 2x$ ist, und macht $MN = p$, so trifft der über TN als Durchmesser beschriebene Kreis die in M auf TN errichtete Senkrechte in den beiden Parabelpunkten P und Q, denn es ist $MP^2 = MT \cdot MN = 2x \cdot p$. Der Mittelpunkt dieses Kreises hat die Abscisse:

$$\frac{(x+p) - x}{2} = \frac{p}{2}$$

und ist daher der Brennpunkt F der Parabel, was die Konstruktion noch vereinfacht.

Aufg. 1. Die Parabel ist der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die durch einen gegebenen Punkt gehen und eine gegebene Gerade berühren.

Aufg. 2. Die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel einer Parabel sei gleich 3, wie heifst ihre Gleichung?

Aufg. 3. Für die Punkte der Parabel mit dem Halbparameter p ist $y^2 - 2px = 0$. Für welche Punkte der Ebene ist die linke Seite positiv, für welche negativ?

Aufg. 4. Wo liegen die Punkte $(2, 3)$; $(-1, 2)$; $(3, -1)$; $(\frac{9}{5}, -3)$ in Bezug auf die Parabel $y^2 = 5x$?

Aufg. 5. Wie grofs ist der Halbparameter der Parabel $y^2 - 5x = 0$, wie weit sind Scheitel und Brennpunkt von einander entfernt?

Aufg. 6. Verschiebe das Koordinatensystem parallel zu sich selbst, sodafs der Brennpunkt der neue Anfangspunkt wird. Wie heifst dann die Gleichung der Parabel?

Aufg. 7. Verlege in derselben Weise den Anfangspunkt nach dem Punkte (x_0, y_0) der Parabel und zeige, dafs die Parabelgleichung in dem neuen Systeme $y^2 + 2y_0y - 2px = 0$ lautet. Warum fehlt x_0?

Aufg. 8. Von einer Parabel sind gegeben die Achse, der Scheitel und ein Punkt P. Man bestimme Halbparameter, Brennpunkt und Direktrix, mit Berücksichtigung der im Texte gegebenen Konstruktion.

Aufg. 9. Von einer Parabel kennt man die Achse, den Scheitel und einen Punkt (x_1, y_1). Wie heifst ihre Gleichung?

Aufg. 10. Zeichne die Parabeln, deren Gleichungen $y^2 = 3x$, $y^2 = 5x$, $y^2 = 6x$ sind.

Aufg. 11. Welche Kurve wird durch die Gleichung $y^2 = -2px$ dargestellt? (§ 5, Aufg. 7.)

Aufg. 12. Welche Kurve wird durch die Gleichung $x^2 = 2py$ dargestellt? (§ 5, Aufg. 7.)

Aufg. 13. Zeichne die Parabel $y = x^2$ und bestimme ihren Brennpunkt und ihre Direktrix.

Aufg. 14. Bringe die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ auf die Form $y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ und zeige durch Parallelverschiebung der Koordinatenachsen, dafs dadurch eine Parabel mit vertikaler Achse und dem Scheitel $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

dargestellt wird. Bestimme die Koordinaten des Brennpunktes sowie den Halbparameter und zeige, dafs sich die Parabel nach oben oder nach unten öffnet, je nachdem a positiv oder negativ ist.

Aufg. 15. Beweise, dafs umgekehrt jede Parabel mit vertikaler Achse durch eine Gleichung von der Form $y = ax^2 + bx + c$ dargestellt wird.

Aufg. 16. Beweise mit Hülfe der Aufg. 14 und 15, dafs man durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte stets eine, und nur eine, Parabel mit vertikaler (also auch mit beliebig vorgeschriebener) Achsenrichtung legen kann.

§ 67. Die Parabel und die Gerade. Durchmesser.

Aus der Gleichung $y^2 = 2px$ folgt, dafs jede zur x-Achse parallele Gerade $y = b$ die Parabel in einem einzigen Punkte schneidet, der die Koordinaten $\frac{b^2}{2p}$, b besitzt.

Aus einem später anzugebenden Grunde nennt man eine jede solche zur Parabelachse parallele Gerade einen Durchmesser der Parabel.

Jede zur y-Achse parallele Gerade $x = a$ (wo a positiv sei) trifft die Parabel in den beiden symmetrisch zur Achse gelegenen Punkten $x = a$, $y = \pm\sqrt{2pa}$. Für $x = 0$ fallen diese beiden Punkte mit dem Scheitel zusammen, sodafs die Gerade $x = 0$, d. h. die y-Achse, als die Tangente der Parabel im Punkte O zu betrachten ist. Sie wird die Scheiteltangente genannt.

Die Schnittpunkte der Parabel $y^2 = 2px$ mit einer beliebigen Geraden $y = \mu x + b$ $(\mu \neq 0)$ erhalten wir durch Kombination der beiden Gleichungen. Die Elimination von x führt zu der in y quadratischen Gleichung

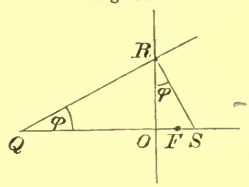
$$\mu y^2 - 2py + 2pb = 0. \tag{1}$$

Diese zeigt, dafs die Gerade die Parabel schneidet, berührt, oder keinen Punkt mit ihr gemein hat, je nachdem die Diskriminante $p^2 - 2\mu bp$ positiv, Null, oder negativ ist.

Da p positiv ist, so wird $p^2 - 2\mu bp = 2p\left(\frac{p}{2} - \mu b\right)$ positiv, Null, oder negativ sein, je nachdem μb (algebraisch)

kleiner, gleich, oder gröfser als $\frac{p}{2}$ ist. Errichtet man aber in dem Durchschnittspunkte R der Geraden mit der y-Achse die Senkrechte RS, so findet man, dafs μb stets in Bezug auf Gröfse und Vorzeichen gleich dem Achsenabschnitte OS ist, den diese Senkrechte auf der x-Achse erzeugt. Und da andrerseits $\frac{p}{2} = OF$ ist, so folgt:

Fig. 48.



I. Eine beliebige Gerade schneidet die Parabel, berührt sie, oder liegt ganz aufserhalb, je nachdem die auf der Geraden in ihrem Schnittpunkte mit der Scheiteltangente errichtete Senkrechte die Parabelachse links von dem Brennpunkte, im Brennpunkte, oder rechts von dem Brennpunkte trifft.

Angenommen, die Gerade $y = \mu x + b$ treffe die Parabel in den beiden Punkten S_1 und S_2, mit den Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2, dann sind y_1 und y_2 die beiden Wurzeln der Gleichung (1), und man erhält daher für die Ordinate des Mittelpunktes der Sehne S_1S_2 den Wert:

$$(2) \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{\mu}.$$

Dieser Ausdruck ist aber von b unabhängig. Konstruiert man daher sämtliche zu der Geraden $y = \mu x + b$ parallelen Sehnen, indem man μ unverändert läfst und b variiert, so erhält man für die Ordinate des Mittelpunktes einer jeden Sehne stets denselben Wert $\frac{p}{\mu}$, und es gilt daher der Satz:

II. In einer Parabel liegen die Mittelpunkte paralleler Sehnen auf einer zur Achse parallelen Geraden, d. h. auf einem Durchmesser.

Aufg. 1. Welche Lagen haben die Geraden $4x - 2y + 7 = 0$, $5x - y - 1 = 0$, $18x - y + 1 = 0$, $x + 2y + 6 = 0$, $x + y - 1 = 0$ zu der Parabel $y^2 - 6x = 0$?

Aufg. 2. Bestimme für die Parabel $y^2 - 3x = 0$ den Ort der Mittelpunkte der zu der Geraden $3x - 7y + 2 = 0$ parallelen Sehnen. In welchem Punkte trifft dieser Ort die Parabel?

Aufg. 3. Gegeben ist die Parabel $y^2 = \frac{7}{2}x$ und die Gleichung $5y - 2 = 0$ eines Durchmessers. Wie heifst die Gleichung des Systemes paralleler Sehnen, die durch diesen Durchmesser halbiert werden?

Aufg. 4. Gegeben ist die Parabel $y^2 = 8x$ und der Durchmesser $y + 3 = 0$. Wie heifst die Gleichung der durch den Punkt (5, 2) gehenden Sehne, die durch diesen Durchmesser halbiert wird?

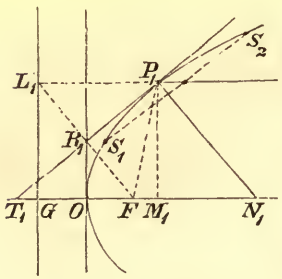
Aufg. 5. Konstruiere für die Parabel $y^2 = 2px$ den Durchmesser, der die Mittelpunkte der Sehnen von gegebener Richtung enthält, insbesondere der Richtung von 45^0.

Aufg. 6. Bringe Satz I auf die Form: Eine Gerade schneidet die Parabel, berührt sie, oder liegt ganz aufserhalb, je nachdem der Fufspunkt des von dem Brennpunkte auf die Gerade gefällten Lotes vor, auf, oder hinter der Direktrix liegt (§ 51, Aufg. 12).

§ 68. Tangente und Normale.

Die Gerade $y = \mu x + b$ schneide die Parabel in den beiden Punkten S_1 und S_2; dann ist also nach dem Vorhergehenden $\mu b < \frac{p}{2}$. Wir wollen nun die Gerade parallel mit sich verschieben, indem wir μ unverändert lassen und b derart variieren, dafs das Produkt μb wächst. Bei dieser Verschiebung nähern sich die Schnittpunkte, die die Gerade jedesmal mit der Parabel gemein hat, einander, während der Mittelpunkt der Sehne $S_1 S_2$ den Durchmesser mit der Gleichung $y = \frac{p}{\mu}$ beschreibt. In dem Momente, in dem $\mu b = \frac{p}{2}$ wird, fallen S_1 und S_2 in einem Punkte P_1 zusammen, der zugleich auf der Parabel und dem Durchmesser liegen mufs, also die Ordinate $y_1 = \frac{p}{\mu}$ und demnach die Abscisse $x_1 = \frac{p}{2\mu^2}$ besitzt. Diese spezielle Sekante ist daher die Tangente der Parabel im Punkte P_1, und wir sehen:

Fig. 49.



I. Die Tangente im Endpunkte eines Durchmessers ist den Sehnen parallel, die von diesem Durchmesser halbiert werden.

Es ergiebt sich daraus zugleich, dafs zu einer gegebenen Richtung μ nur eine einzige Tangente gehört und dafs $x_1 = \frac{p}{2\mu^2}$, $y_1 = \frac{p}{\mu}$ die Koordinaten des Berührungspunktes dieser Tangente sind. Umgekehrt gehört zu jedem Parabelpunkte (x_1, y_1) eine ganz bestimmte Tangente, deren Richtungskoeffizient $\mu = \frac{p}{y_1}$ ist. Die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) lautet daher:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1),$$

oder:

$$yy_1 - y_1^2 = p(x - x_1).$$

Da aber

$$y_1^2 = 2px_1$$

ist, so erhalten wir als Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1):

(1) $$yy_1 = p(x + x_1).$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich die Achsenabschnitte a und b der Tangente, nämlich:

$$a = OT_1 = -x_1,$$

$$b = OR_1 = \frac{px_1}{y_1} = \frac{y_1}{2},$$

d. h.: II. Die Tangente trifft die Achse in einem Punkte, der vom Scheitel ebenso weit entfernt ist als der Fufspunkt der Ordinate des Berührungspunktes.

Daraus folgt dann von selbst, dafs der Abschnitt auf der y-Achse halb so grofs ist als diese Ordinate. Um also in einem beliebigen Punkte P_1 der Parabel die Tangente zu konstruieren, trage man die Abscisse des Punktes P_1 von O aus nach links ab und verbinde den so erhaltenen Punkt T_1 mit P_1.

Fällt man von P_1 auf die Direktrix das Lot P_1L_1, so ist $P_1L_1 = P_1F$. Da überdies $OR_1 = \frac{1}{2}y_1$, $GL_1 = y_1$ ist, so folgt, dafs F, R_1, L_1 in gerader Linie liegen und dafs $FR_1 = R_1L_1$ ist. Dann sind aber die Dreiecke FR_1P_1 und $L_1R_1P_1$ kongruent, woraus sich ergiebt, dafs die Winkel

FP_1R_1 und $L_1P_1R_1$ einander gleich sind und daſs FR_1 auf der Tangente senkrecht steht, d. h.:

III. Die Tangente halbiert den Winkel, den der Brennstrahl und der Durchmesser des Berührungspunktes miteinander bilden.

IV. Der Fufspunkt des Lotes, das man von dem Brennpunkte auf eine beliebige Tangente fällen kann, liegt stets auf der Scheiteltangente.

Oder auch: Die Parabel wird umhüllt von dem einen Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel eine feste Gerade, die Scheiteltangente, durchläuft, während der andere Schenkel durch einen festen Punkt, den Brennpunkt, hindurchgeht.

Die im Berührungspunkte P_1 auf der Tangente errichtete Senkrechte heifst die Normale der Parabel in P_1. Ihre Gleichung lautet:

$$(2) \qquad y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Für $y = 0$ erhalten wir den Abschnitt auf der x-Achse, nämlich:

$$x = ON_1 = x_1 + p.$$

Daraus folgt:

$$(3) \qquad M_1N_1 = p.$$

Man nennt das zwischen der Ordinate und der Normale gelegene Stück der x-Achse die Subnormale des Punktes P_1 (§ 51, Aufg. 7) und hat daher den Satz:

V. Bei der Parabel ist die Subnormale für alle Punkte konstant, nämlich gleich dem Halbparameter p.

Um von einem beliebigen Punkte (x_0, y_0) an die Parabel eine Tangente zu legen, hat man nur die Bedingung dafür auszudrücken, daſs die durch (x_0, y_0) gehende Gerade $y - y_0 = \mu(x - x_0)$ die Parabel in zwei zusammenfallenden Punkten trifft. Durch Elimination von x erhält man, wie in § 67, die in y quadratische Gleichung

$$(4) \qquad \mu y^2 - 2py + 2p(y_0 - \mu x_0) = 0,$$

die die Ordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit der

Parabel liefert. Die Schnittpunkte fallen zusammen, wenn die Diskriminante verschwindet, d. h. wenn

$$2x_0\mu^2 - 2y_0\mu + p = 0 \tag{5}$$

ist.

Da diese Gleichung in μ quadratisch ist, so erhält man zwei Werte von μ, die reell und von einander verschieden, reell und zusammenfallend, oder imaginär sind, je nachdem $y_0^2 - 2px_0$ positiv, Null, oder negativ ist, d. h. es sind zwei Tangenten, eine, oder gar keine möglich, je nachdem der Punkt (x_0, y_0) aufserhalb, auf, oder innerhalb der Parabel liegt (§ 66, Aufg. 3).

Sollen insbesondere die beiden durch (x_0, y_0) gehenden Tangenten einen rechten Winkel mit einander einschliefsen, so müssen die beiden Wurzeln μ_1 und μ_2 von (5) der Relation $\mu_1\mu_2 = -1$ genügen, d. h. es mufs sein:

$$\frac{p}{2x_0} = -1 \quad \text{oder} \quad x_0 = -\frac{p}{2}. \tag{6}$$

Der Punkt (x_0, y_0) mufs also auf der Direktrix liegen. Umgekehrt erhält man für jeden Punkt der Direktrix die Relation $\mu_1\mu_2 = -1$, und es gilt daher der Satz:

VI. Der Ort der Punkte, von denen aus man zwei auf einander senkrechte Tangenten an eine Parabel legen kann, ist die Direktrix (§ 48, Aufg. 6).

Aufg. 1. Beweise, dafs die Gerade $11x - 6y + 9 = 0$ die Parabel $y^2 = 11x$ berührt, und bestimme die Koordinaten des Berührungspunktes.

Aufg. 2. Wie heifst für dieselbe Parabel die Gleichung der Tangente, die der Geraden $2x - 7y + 3 = 0$ parallel ist?

Aufg. 3. Konstruiere zu einer gegebenen Parabel die Tangente von gegebener Richtung und ihren Berührungspunkt.

Aufg. 4. Beweise, dafs für die Parabel $y = x^2$ die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) lautet: $y + y_1 = 2xx_1$.

Aufg. 5. Von einer Parabel kennt man den Scheitel, die Scheiteltangente und einen Punkt P. Man soll mit Hülfe von Tangente, Normale und Subnormale den Brennpunkt bestimmen.

Aufg. 6. Beweise, dafs man die beiden Tangenten, die man von einem beliebigen Punkte P an die Parabel ziehen

kann, dadurch konstruiert, dafs man über der Verbindungslinie von P mit dem Brennpunkte als Durchmesser einen Kreis beschreibt und dessen Schnittpunkte mit der Scheiteltangente mit P verbindet.

Aufg. 7. Beweise mit Hülfe dieser Konstruktion den Satz VI des Textes geometrisch.

Aufg. 8. Von einer gezeichnet vorliegenden Parabel den Brennpunkt, die Achse und die Direktrix zu finden. (Andeutung: Mittels zweier paralleler Sehnen findet man einen Durchmesser und die Tangente in seinem Endpunkte. Satz III führt dann zu einer durch den Brennpunkt gehenden Geraden und eine Wiederholung der ganzen Konstruktion zum Brennpunkte selbst.)

§ 69. Anwendung schiefwinkliger Koordinaten.

Verschiebt man das rechtwinklige Koordinatensystem, auf das sich die Parabelgleichung

(1) $$y^2 = 2px$$

bezieht, parallel mit sich selbst nach dem Parabelpunkte (x_0, y_0), als neuem Anfangspunkte, und setzt dem entsprechend

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y',$$

unter x', y' die neuen Koordinaten verstehend, so geht die Gleichung (1) über in:

(2) $$y'^2 + 2y_0y' - 2px' = 0$$

(§ 66, Aufg. 7).

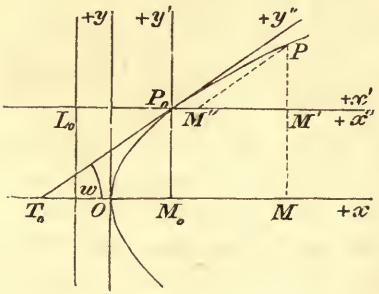
Nunmehr wählen wir den durch P_0 gehenden Durchmesser (die x'-Achse) zur Abscissenachse und die Tangente der Parabel in P_0 zur Ordinatenachse eines schiefwinkligen Koordinatensystemes. Ein beliebiger Parabelpunkt P habe die rechtwinkligen Koordinaten

$$P_0M' = x', \quad M'P = y'$$

und die schiefwinkligen Koordinaten

$$P_0M'' = x'', \quad M''P = y''.$$

Fig. 50.



Schliefst dann die Tangente in P_0 mit der alten x-Achse (und folglich auch mit der x'-Achse) den Winkel w ein, so ist zunächst:

$$\operatorname{tg} w = \frac{p}{y_0},$$

und es gelten die Transformationsformeln:

$$x' = x'' + y'' \cos w,$$
$$y' = y'' \sin w,$$

die man direkt aus der Figur abliest, die man aber auch aus § 15 erhalten kann, indem man dort $\alpha = 0$, $\beta = w$ setzt. Die Gleichung (2) geht dann über in:

$$y''^2 \sin^2 w + 2y_0 y'' \sin w - 2px'' - 2py'' \cos w = 0,$$

oder, wegen $y_0 \sin w = p \cos w$, in:

$$y''^2 = 2 \frac{p}{\sin^2 w} \cdot x''. \tag{3}$$

Nun folgt aus $\operatorname{tg} w = \frac{p}{y_0}$, dafs $\sin^2 w = \frac{p^2}{p^2 + y_0^2}$ und daher $\frac{p}{\sin^2 w} = \frac{p^2 + y_0^2}{p} = p + \frac{y_0^2}{p} = p + 2x_0 = 2\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)$, d. h. gleich der doppelten Entfernung des Punktes P_0 von der Direktrix ist. Bezeichnen wir diese doppelte Entfernung mit q und schreiben der Einfachheit halber x und y statt x'' und y'', so lautet die auf das schiefwinklige Achsensystem (Durchmesser und zugehörige Tangente) bezogene Parabelgleichung:

$$y^2 = 2qx. \tag{4}$$

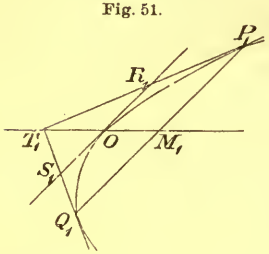
Kombinieren wir mit dieser Gleichung die auf dasselbe schiefwinklige Achsensystem bezogene Gleichung $y = \mu x + b$ einer Geraden, so erhalten wir, wie in § 67, die quadratische Gleichung:

$$\mu y^2 - 2qy + 2qb = 0,$$

deren Wurzeln die Ordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel darstellen und die reell und verschieden, reell und zusammenfallend, oder imaginär sind, je nachdem μb kleiner, gleich, oder gröfser ist als $\frac{q}{2}$. Da sich ferner die Entwicklungen des § 68 wesentlich auf die Form der beiden Gleichungen $y^2 = 2px$ und $y = \mu x + b$ stützten, nicht aber

auf den Umstand, dafs zufällig das Achsensystem ein rechtwinkliges war, so haben wir in den Rechnungen, die auf die Gleichung der Tangente führten, einfach p mit q zu vertauschen, und wir erhalten daher in unserm schiefwinkligen Achsensysteme (dessen Anfangspunkt jetzt mit O bezeichnet werde) als Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) die Gleichung:

Fig. 51.



$$yy_1 = q(x + x_1). \tag{5}$$

Für $y = 0$ ergiebt sich der Abschnitt der Tangente auf der x-Achse, nämlich:

$$x = OT_1 = -x_1.$$

Denselben Achsenabschnitt liefert aber auch der zu P_1 symmetrisch gelegene Punkt Q_1 mit den Koordinaten x_1, $-y_1$, sodafs sich der Satz ergiebt:

Die Tangenten in den Endpunkten einer beliebigen Sehne der Parabel schneiden sich in einem Punkte des Durchmessers, der diese Sehne halbiert. Der Mittelpunkt der Sehne und der Schnittpunkt der beiden Tangenten liegen gleichweit vom Endpunkte des Durchmessers entfernt.

Aufg. 1. Von einer Parabel kennt man einen Durchmesser, die Tangente in seinem Endpunkte und noch einen Punkt P. Konstruiere die Tangente in P.

Aufg. 2. Gegeben ist eine Parabel und ein Punkt aufserhalb. Man konstruiere die beiden von dem Punkte an die Parabel gehenden Tangenten, mit Hülfe des durch den Punkt gehenden Durchmessers.

Aufg. 3. Die auf Achse und Scheiteltangente bezogene Parabelgleichung sei $y^2 = 5x$. Wie heifst die Gleichung der Parabel, bezogen auf das durch Durchmesser und Tangente des Parabelpunktes $(\frac{9}{5}, 3)$ gebildete schiefwinklige System?

Aufg. 4. Wie heifst in diesem schiefwinkligen Systeme die Gleichung der Tangente, deren Berührungspunkt in dem ursprünglichen, rechtwinkligen Systeme die Koordinaten $\frac{4}{5}$, -2 hat?

§ 70. Pol und Polare.

Die auf einen Durchmesser und die Tangente im Endpunkte bezogene Parabelgleichung sei:

$$y^2 = 2qx. \tag{1}$$

Zwei beliebige Punkte P_1 und P_2 mögen durch ihre auf dasselbe System bezogenen Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 gegeben sein. Irgend ein Punkt der Verbindungslinie P_1P_2 hat dann die Koordinaten $\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$. Damit er auf der Parabel liege, mufs sein Teilverhältnis λ der Gleichung

$$\left(\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)^2 = 2q\,\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

genügen, die man auch in der Form

$$\lambda^2(y_2^2-2qx_2)+2\lambda(y_1y_2-q(x_1+x_2))+y_1^2-2qx_1=0 \tag{2}$$

schreiben kann. Diese quadratische Gleichung liefert die beiden Teilverhältnisse λ_1 und λ_2, die den Schnittpunkten S_1 und S_2 der Geraden mit der Parabel entsprechen. Nun folgt, wie früher bei der Ellipse, dafs die vier Punkte P_1, P_2, S_1, S_2 allemal, aber auch nur dann, eine harmonische Gruppe bilden, wenn $\lambda_1+\lambda_2=0$ ist, d. h. wenn die Gleichung

$$y_1y_2-q(x_1+x_2)=0 \tag{3}$$

besteht.

Wählen wir daher zuerst den Punkt P_1 als einen festen Punkt, so ist der Punkt P_2 nur an die Bedingung geknüpft, dafs seine Koordinaten der Gleichung

$$yy_1-q(x+x_1)=0 \tag{4}$$

genügen müssen. Diese Gleichung stellt aber eine gerade Linie dar. Man nennt sie die Polare des Punktes P_1, diesen den Pol der Geraden. Wir erhalten demnach den Satz:

I. Zieht man von einem beliebigen Punkte Strahlen nach einer Parabel und bestimmt jedesmal zu den beiden Schnittpunkten und dem gegebenen Punkte, als zugeordnetem, den vierten harmonischen Punkt, so ist der Ort dieser vierten harmonischen Punkte eine gerade Linie.

Liegt P_1 aufserhalb der Parabel, so ergiebt sich durch eine einfache Überlegung, dafs die Polare die Berührungssehne ist.

Auch die übrigen Sätze, die wir früher kennen gelernt haben, wiederholen sich ohne irgend welche Schwierigkeit bei der Parabel, sodafs wir uns darauf beschränken können, sie kurz zusammen zu stellen:

II. Die Tangente ist die Polare ihres Berührungspunktes, dieser der Pol der Tangente.

III. Den Punkten einer Punktreihe entsprechen als Polaren die Strahlen eines Strahlenbüschels, und umgekehrt.

IV. Die Polaren der Punkte eines Durchmessers sind einander parallel, treffen sich also in einem unendlich fernen Punkte — dem Pole dieses Durchmessers.

Setzt man speziell ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Parabelachse und Scheiteltangente) voraus, so heifst die Gleichung der Polaren des Punktes (x_1, y_1):

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Für $x_1 = \frac{p}{2}$, $y_1 = 0$ findet man hieraus $x = -\frac{p}{2}$, d. h.:

V. Die Polare des Brennpunktes ist die Direktrix.

Die Polare eines Punktes P_1 der Direktrix lautet wegen $x_1 = -\frac{p}{2}$:

$$yy_1 = px - \frac{p^2}{2}.$$

Sie geht durch den Brennpunkt und hat den Richtungskoeffizienten $\frac{p}{y_1}$. Da nun die Verbindungslinie von P_1 mit dem Brennpunkte den Richtungskoeffizienten $-\frac{y_1}{p}$ besitzt, so ergiebt sich, wie bei der Ellipse und der Hyperbel, der Satz:

VI. Die Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Pole einer beliebigen durch ihn hindurchgehenden Sehne steht senkrecht auf dieser.

Aufg. 1. Beweise die Sätze II, III, IV sorgfältig an Hand der für die Ellipse ausführlich gegebenen Entwicklungen.

Aufg. 2. Man überzeuge sich, dafs die Sätze über Pol und Polare unabhängig von dem gewählten Koordinatensysteme sind.

Aufg. 3. Man beweise, dafs der Pol der Geraden $ax + by + c = 0$ in Bezug auf die Parabel $y^2 = 2qx$ die Koordinaten $x_1 = \frac{c}{a}$, $y_1 = -\frac{b}{a}q$ besitzt. Wähle speziell für die Gerade und die Parabel die Gleichungen $5x - 7y + 2 = 0$ und $y^2 - 3x = 0$.

Aufg. 4 Konstruiere die Polare eines Punktes in Bezug auf die Parabel mit Hülfe des vollständigen Vierecks.

Aufg. 5 Beachte, dafs der Richtungskoeffizient der Polaren $yy_1 = q(x + x_1)$ nur von der Ordinate des Poles abhängt, und beweise daraus Satz IV.

Aufg. 6 Bestimme die Koordinaten der Berührungspunkte der beiden Tangenten, die man vom Punkte $(-5, 3)$ an die Parabel $y^2 - 8x = 0$ ziehen kann. (Benutze die Polare des gegebenen Punktes.)

§ 71. Flächeninhalt eines Parabelsegmentes.

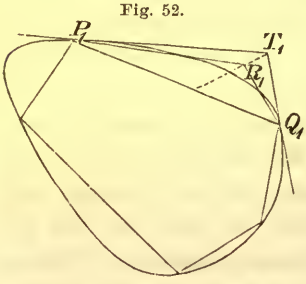
Um den Flächeninhalt eines Parabelsegmentes zu bestimmen, das eine beliebige Sehne P_1Q_1 (vergl. Fig. 51) abschneidet, konstruiere man in P_1 und Q_1 die Tangenten, die sich in T_1 schneiden mögen, sowie die zu P_1Q_1 parallele Tangente, deren Berührungspunkt O sei. Dann folgt aus $OT_1 = OM_1$ und $R_1S_1 = \frac{1}{2}P_1Q_1$, dafs der Inhalt des der Parabel eingeschriebenen Dreiecks OP_1Q_1 doppelt so grofs ist als der Inhalt des zugehörigen umgeschriebenen Dreiecks $R_1S_1T_1$. Wendet man nun denselben Satz auf die durch die Sehnen OP_1 und OQ_1 bestimmten Parabelsegmente an, indem man wieder die zu diesen Sehnen parallelen Tangenten mit ihren Berührungspunkten konstruiert, so entstehen wieder eingeschriebene Dreiecke mit den Grundlinien OP_1 und OQ_1, und jedes von diesen ist doppelt so grofs als das zugehörige durch die Tangenten seiner Eckpunkte gebildete umgeschriebene Dreieck.

Indem man dieses Verfahren immer wieder von neuem wiederholt, erhält man eine Reihe von eingeschriebenen Dreiecken, deren Summe sich immer mehr dem gesuchten Parabelsegmente nähert, und gleichzeitig eine Reihe von umgeschriebenen Dreiecken, deren Summe sich immer mehr der durch den Bogen $P_1 Q_1$ der Parabel und die beiden Tangenten $P_1 T_1$ und $Q_1 T_1$ begrenzten Fläche nähert. Das gesuchte Parabelsegment ist daher doppelt so grofs als diese Fläche, und da beide zusammen gleich dem Dreiecke $P_1 Q_1 T_1$ sind, so folgt:

I. Das von einer beliebigen Sehne abgeschnittene Parabelsegment ist gleich zwei Dritteln des von der Sehne und den Tangenten in ihren Endpunkten gebildeten Dreiecks.

Diesen Satz kann man mit Vorteil dazu verwenden, um den Flächeninhalt einer beliebig krummlinig begrenzten Figur graphisch dadurch zu ermitteln, dafs man sie in eine geradlinig begrenzte verwandelt. Man schreibe nämlich der Figur (Fig. 52) ein Polygon von so vielen Seiten ein, dafs man die abgeschnittenen Segmente als Parabelsegmente betrachten kann, von denen ein jedes mit Hülfe von I leicht in ein Dreieck verwandelt werden kann. (In der untenstehenden Figur ist $\triangle P_1 Q_1 R_1 = \frac{2}{3} \triangle P_1 Q_1 T_1$.)

Fig. 52.



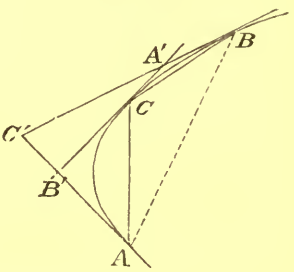
Da alle zu $P_1 Q_1$ parallelen Sehnen durch den Durchmesser $T_1 O M_1$ (Fig. 51) halbiert werden, so erkennt man leicht, dafs das Parabelsegment durch den Durchmesser in zwei inhaltsgleiche Teile geteilt wird, und dafs daher der Inhalt des Parabelstückes $O M_1 P_1$ gleich zwei Dritteln des Dreieckes $T_1 M_1 P_1$ ist. Steht insbesondere die Sehne $P_1 Q_1$ senkrecht zur Parabelachse, ist also O der Scheitel der Parabel, und bezeichnet man die rechtwinkligen Koordinaten von P_1 mit $O M_1 = x_1$, $M_1 P_1 = y_1$, so folgt:

$$O M_1 P_1 = \tfrac{2}{3} x_1 y_1.$$

Mit Hülfe von I kann man den Satz, dafs das Dreieck $O P_1 Q_1$ doppelt so grofs ist als das Dreieck $R_1 S_1 T_1$, noch

verallgemeinern. Es sei nämlich einer Parabel ein ganz beliebiges Dreieck ABC (Fig. 53) eingeschrieben. Man konstruiere durch die Tangenten der Eckpunkte das zugehörige umgeschriebene Dreieck $A'B'C'$. Dann folgt in leicht verständlicher Abkürzung:

Fig. 53.



Parabelsegment $(AB) = \frac{2}{3} \triangle ABC'$,

„ $(BC) = \frac{2}{3} \triangle BCA'$,

„ $(CA) = \frac{2}{3} \triangle CAB'$.

Subtrahiert man die beiden letzten Gleichungen von der ersten, so folgt: $\triangle ABC = \frac{2}{3}(\triangle A'B'C' + \triangle ABC)$ oder: $\triangle ABC = 2 \cdot \triangle A'B'C'$, d. h.:

II. Das einer Parabel eingeschriebene Dreieck ist doppelt so grofs als das zugehörige umgeschriebene Dreieck.

Aufg. Berechne den Flächeninhalt des Segmentes, das die Gerade $5x - y - 6 = 0$ von der Parabel $y^2 = 5x$ abschneidet, unter der Voraussetzung, dafs die Parabelachse die x-Achse und die Scheiteltangente die y-Achse sei.

§ 72. Gemeinsame Darstellungen von Ellipse, Hyperbel und Parabel.

In der Stereometrie wird gezeigt, dafs sich die Ellipse, die Hyperbel und die Parabel darstellen lassen als Schnitte einer Ebene mit einem geraden Kreiskegel. Aus diesem Grunde werden die drei Kurven auch mit dem gemeinsamen Namen Kegelschnitte bezeichnet. Zu den Kegelschnitten sind aber auch noch die Linienpaare zu rechnen, die man erhält, wenn die Schnittebene durch die Spitze des Kegels geht. Geht die Ebene nicht durch die Spitze, so ist der Kegelschnitt eine geschlossene Kurve, also eine Ellipse, wenn die Schnittebene sämtliche Seitenlinien des Kegels trifft. Neigt man dann die Ebene immer mehr, bis sie zu einer Seitenlinie des Kegels parallel wird, so geht die Ellipse in eine Parabel über, deren Achse jener Seitenlinie parallel ist. Dreht man die Ebene

noch weiter, sodafs sie zwei verschiedenen Seitenlinien des Kegels parallel wird, so besteht die Schnittkurve aus zwei getrennten Teilen, indem auch der durch die Verlängerungen der Seitenlinien gebildete Kreiskegel getroffen wird. Der Kegelschnitt ist dann eine Hyperbel, und die Richtungen jener beiden Seitenlinien bestimmen die Richtungen der beiden Asymptoten. Man sieht aus dieser Entstehungsweise, dafs die Parabel aufzufassen ist als ein Grenzfall sowohl der Ellipse als auch der Hyperbel, den man erhält, wenn man den Mittelpunkt der Schnittkurve ins Unendliche rücken läfst. Dies läfst sich aber auch deutlich aus unsern analytischen Entwicklungen erkennen.

In den Paragraphen 46 und 60 haben wir nämlich, unter Voraussetzung rechtwinkliger Koordinaten (Hauptachse und Scheiteltangente), für die Ellipse und die Hyperbel die beiden Scheitelgleichungen

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 \tag{1}$$

und

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 \tag{2}$$

abgeleitet. Vergleicht man aber hiermit die Scheitelgleichung der Parabel, nämlich

$$y^2 = 2px, \tag{3}$$

so erkennt man sofort, dafs die Gleichungen (1) und (2) in (3) übergehen, sobald man a unendlich grofs werden läfst, d. h. sobald bei unverändertem Halbparameter der Mittelpunkt der Ellipse oder der Hyperbel ins Unendliche rückt (§ 40, Aufg. 9).

Bei dieser Umformung nähert sich die numerische Exzentrizität ε dem Werte 1, sowohl wenn wir von der Ellipse als auch wenn wir von der Hyperbel ausgehen. Denn es ist $c^2 = a^2 \mp b^2$, wo das obere Zeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel gilt. Nun folgt aber:

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 \mp \frac{b^2}{a^2} = 1 \mp \frac{p}{a}. \tag{4}$$

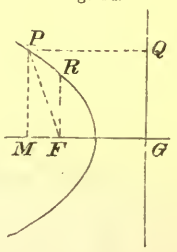
Wird daher bei unverändertem p der Wert von a unendlich

grofs, so wird $\varepsilon = 1$. Man kann daher die Parabel als eine Ellipse oder als eine Hyperbel mit der numerischen Exzentrizität $\varepsilon = 1$ bezeichnen.

Wir haben nun darauf aufmerksam gemacht (§ 52, Aufg. 3; § 65, Aufg. 3), dafs sowohl die Ellipse als auch die Hyperbel vollständig bestimmt sind, wenn man einen Brennpunkt, die zugehörige Direktrix und die numerische Exzentrizität kennt, die bei der Ellipse kleiner als 1 und bei der Hyperbel gröfser als 1 zu wählen ist; wir haben ferner gesehen, dafs sowohl bei der Ellipse als auch bei der Hyperbel das Verhältnis der Abstände eines Kurvenpunktes von dem Brennpunkte und der zugehörigen Direktrix jedesmal gleich der numerischen Exzentrizität ist, und dafs jeder nicht der Ellipse oder der Hyperbel angehörige Punkt ein anderes Verhältnis ergiebt (§ 65, Aufg. 4). Kombinieren wir damit den Umstand, dafs die Parabel vollständig bestimmt ist durch den Brennpunkt und die Direktrix, und dafs für jeden Parabelpunkt, und nur für einen solchen, das Verhältnis der Abstände von dem Brennpunkte und der Direktrix gleich der numerischen Exzentrizität, d. h. gleich 1, ist, so gewinnen wir folgenden, die drei Kegelschnitte umfassenden Satz:

I. Der Ort der Punkte, für die das Verhältnis der Abstände von einem festen Punkte und einer festen Geraden konstant ist, ist ein Kegelschnitt und zwar eine Ellipse, eine Parabel, oder eine Hyperbel, je nachdem das konstante Verhältnis kleiner, gleich, oder gröfser ist als Eins. Der feste Punkt ist ein Brennpunkt, die feste Gerade die zugehörige Direktrix und das konstante Verhältnis die numerische Exzentrizität des Kegelschnittes.

Fig. 54.



Auf Grund dieses Satzes kann man auch eine gemeinsame Gleichung der drei Kegelschnitte gewinnen, die wir zunächst unter Benutzung von Polarkoordinaten ableiten wollen. Der feste Punkt F werde zum Anfangspunkte und die Richtung des von F auf die feste Gerade gefällten Lotes FG zur positiven Richtung der x-Achse gewählt. Es

sei $FG = d$ und das gegebene konstante Verhältnis gleich ε. Ist P ein Punkt des Kegelschnittes, so ist:

$$\frac{PF}{PQ} = \varepsilon.$$

Hat nun P die Polarkoordinaten r, u, so folgt (in der Fig. ist u ein stumpfer Winkel, also $\cos u$ negativ):

$$PQ = MG = d - r\cos u$$

und demnach:

$$\frac{r}{d - r\cos u} = \varepsilon,$$

woraus sich ergiebt:

$$r = \frac{d\varepsilon}{1 + \varepsilon\cos u}.$$

Diese Gleichung besteht zwischen den Polarkoordinaten eines jeden Punktes des Kegelschnittes, aber auch nur eines solchen Punktes. Sie heifst die Polargleichung des durch die Gröfsen d und ε definierten Kegelschnittes. Für $u = 90^0$ erhält man die zu dem Brennpunkte F gehörige Ordinate, nämlich:

$$r = FR = d\varepsilon.$$

Setzt man daher $d\varepsilon = p$, wo also jetzt p den Halbparameter bedeutet, so läfst sich die Polargleichung des durch $p = d\varepsilon$ und ε definierten Kegelschnittes in der Form schreiben:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos u}. \tag{5}$$

Sie stellt eine Ellipse, eine Parabel, oder eine Hyperbel dar, je nachdem $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$, oder $\varepsilon > 1$ ist.

Aus dieser Darstellung folgt unmittelbar der Satz (vergl. auch § 41, Aufg. 5, und § 55, Aufg. 7):

II. Alle Kegelschnitte mit derselben numerischen Exzentrizität sind einander ähnlich.

Insbesondere sind alle Parabeln einander ähnlich.

Ferner ergiebt sich (siehe auch § 41, Aufg. 6, und § 55, Aufg. 3):

III. Alle Kegelschnitte mit derselben numerischen Exzentrizität und demselben Halbparameter sind kongruent.

Aus I kann man leicht auch in rechtwinkligen Koordinaten eine gemeinsame Gleichung der drei Kegelschnitte herstellen. Ist nämlich der feste Punkt durch (x_0, y_0) und die feste Gerade durch ihre Normalgleichung $x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta = 0$ gegeben, so lautet die gemeinschaftliche Kegelschnittsgleichung:

$$(6) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2 (x\cos\alpha + y\sin\alpha - \delta)^2.$$

Diese Gleichung ist, wie alle die Gleichungen, die wir in Cartesischen Koordinaten für die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel (mit Einschlufs des Linienpaares) abgeleitet haben, in Bezug auf x und y vom zweiten Grade, d. h. von der Form:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Infolgedessen werden die Kegelschnitte auch Kurven zweiten Grades genannt. Eine vollständige Diskussion dieser allgemeinen Gleichung zweiten Grades, insbesondere die Erörterung der Frage, ob auch umgekehrt jede Kurve zweiten Grades ein Kegelschnitt sei, liegt aber nicht mehr in dem Plane dieses Buches.

Aufg. 1. Beachte, dafs für jeden Kegelschnitt ein Brennpunkt von der zugehörigen Direktrix die Entfernung $d = \frac{p}{\varepsilon}$ besitzt.

Aufg. 2. Bei der Ellipse findet man für den Abstand $a - c$ eines Brennpunktes von dem zugehörigen Scheitel die Formel $a - c = \frac{p}{1+\varepsilon}$. Denselben Wert hat bei der Hyperbel der entsprechende Abstand $c - a$. Läfst man daher bei unverändertem p die Ellipse oder die Hyperbel in eine Parabel übergehen, so erhält man als Grenzwert für jenen Abstand den Wert $\frac{p}{2}$. Es stellen also für jeden Kegelschnitt $\frac{p}{\varepsilon}$ und $\frac{p}{1+\varepsilon}$ die Entfernungen eines Brennpunktes von der zugehörigen Direktrix und dem zugehörigen Scheitel dar.

Aufg. 3. Beweise, dafs bei der Parabel stets $y = p\,\mathrm{tg}\frac{u}{2}$ ist. (Die Parabel habe die in Fig. 54 vorausgesetzte Lage zum Achsensysteme. $MP = y = r\sin u$ und Gl. (5) führen dann sofort zu der verlangten Formel.)

Aufg. 4. Beachte, dafs aus Satz I auch das Linienpaar, als degenerierte Hyperbel, hervorgeht, wenn nämlich der feste

Punkt auf der festen Geraden liegt. Das konstante Verhältnis ist dann von selbst notwendig gröfser als 1. (Vergl. § 55, Aufg. 9.)

Aufg. 5. Bewegt sich ein rechter Winkel so, dafs sein Scheitel einen festen Kreis durchläuft, während der eine Schenkel stets durch einen festen Punkt geht, so umhüllt der andere Schenkel einen Kegelschnitt. Dieser ist eine Ellipse, wenn der Punkt innerhalb, eine Hyperbel, wenn er aufserhalb des Kreises liegt. Geht der Kreis in eine Gerade über, so ist der Kegelschnitt eine Parabel. (§ 51, VI; § 64, V; § 68, IV.)

Aufg. 6. Beachte, dafs für jeden Kegelschnitt der Ort der Schnittpunkte zu einander senkrechter Tangenten ein Kreis ist. Wie sieht dieser Kreis bei der Parabel aus?

Aufg. 7. Beweise, dafs für jeden auf die Hauptachse als x-Achse bezogenen Kegelschnitt die Tangente in einem Punkte vertikal über (oder unter) einem Brennpunkte den Richtungskoeffizienten $\pm \varepsilon$ besitzt.

Aufg. 8. Stelle weitere gemeinsame Sätze über die Kegelschnitte zusammen.

Sachregister.

Abbildung der Zahlenreihe auf die Punktreihe 2, 4.
Abscisse eines Punktes 2, 12.
Abscissenachse 2, 11.
Abstand eines Punktes von einer Geraden 26—28, 33—34, 46.
Achse der Parabel 156.
Achsen (grofse, kleine) der Ellipse 93.
Achsen (x-Achse etc.) s. Koordinatenachsen.
Achsenabschnitte einer Geraden 34—35.
Affine Punktsysteme 59—62.
Affinitätsachse 59.
Affinitätsverhältnis 59.
Anfangspunkt 1, 11, 12.
Anomalie 16.
Asymptoten der Hyperbel 130.

Bedingung, dafs sich drei Geraden in demselben Punkte schneiden 53—56.
Bedingung, dafs sich zwei Kreise rechtwinklig schneiden 87, Aufg. 2 u. 11.
Bedingung, dafs zwei Geraden auf einander senkrecht stehen 50.
Bedingung, dafs zwei Geraden einander parallel sind 47, 49.
Berührungslinie (Berührungspunkt etc.) s. Tangente.
Berührungssehne 82, 117.
Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene durch Koordinaten 11—13.
Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Geraden durch sein Teilverhältnis 4—7.
Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Geraden durch seine Abscisse 1—3.
Bestimmung eines Kreises durch drei Punkte 75—76.
Bestimmung von Strecken 3—4.
Brennpunkt der Parabel 155.
Brennpunkte (Brennstrahlen) der Ellipse 91.
Brennpunkte (Brennstrahlen) der Hyperbel 127.
Brennpunktseigenschaften der Ellipse 119—123.
Brennpunktseigenschaften der Hyperbel 150—153.
Brennpunktseigenschaften der Parabel 168.

Cartesius (Cartesische Koordinaten) 13.
Ceva (Satz des Ceva) 64.
Chordale 85.
Chordalzentrum 86.
Cyklische Vertauschung der Indices 23, 32 Aufg. 6, 52 Aufg. 7. u. 8.

Direktrix der Ellipse 123—125.
Direktrix der Hyperbel 153—155.
Direktrix der Parabel 155.
Doppelpunkte s. Involution.
Doppelverhältnis 7—11.
Drehungssinn (positiver, negativer) 15.
Durchmesser der Ellipse 93, 106—108.
Durchmesser der Hyperbel 128, 143—144.
Durchmesser der Parabel 158—160.
Durchschnittspunkt zweier Geraden 47—48.

Eingeschriebener Kreis der Ellipse 96, 97—98.
Einheitspunkt 1, 11.
Ellipse 91—126.
Entfernung zweier Punkte 16—17.
Exzentrische Anomalie 108—110.
Exzentrizität (lineare) der Ellipse 91, 95.
Exzentrizität (numerische) der Ellipse 95.
Exzentrizität (lineare) der Hyperbel 127, 132.
Exzentrizität (numerische) der Hyperbel 132.
Exzentrizität (numerische) der Parabel 173.
Exzentrizitätskreis 135.

Flächeninhalt s. Inhalt.
Fundamentalstrecke 4.

Gegenpunkte der Brennpunkte (einer Ellipse oder Hyperbel) in Bezug auf die Tangenten 121, 152.
Geometrische Örter 66—69.
Gleichseitige Hyperbel 130.
Gleichung der Ellipse 92.
Gleichung der Ellipse, bezogen auf konjugierte Durchmesser 102.
Gleichung der Geraden 31.
Gleichung der Hyperbel 128.
Gleichung der Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten 145.
Gleichung der Hyperbel, bezogen auf konjugierte Durchmesser 141.
Gleichung der Parabel 156.
Gleichung der Parabel, bezogen auf Durchmesser und zugehörige Tangente 165.
Gleichung des Kreises 71, 72—75.
Gleichung einer Kurve 71.

Halbierungslinien der Winkel eines Dreiecks 57, 58, 66 Aufg. 3.
Halbierungslinien des Winkels zweier Geraden 56—59.
Halbparameter der Ellipse 93.
Halbparameter der Hyperbel 129.
Halbparameter der Parabel 156.
Harmonische Punkte 8.
Harmonische Punktgruppen im vollständigen Vierecke 65.
Hauptachse der Hyperbel 129.
Hauptachsen der Ellipse 93.
Hauptdurchmesser der Hyperbel 128.
Höhen eines Dreiecks 52 Aufg. 7, 55, 59 Aufg. 8, 66 Aufg. 3.
Hyperbel 127—155.

Inhalt der Ellipse 125—126.
Inhalt eines Dreiecks 20—25.
Inhalt eines Parabelsegmentes 169—171.
Inhalt eines Vielecks 25—26.
Inhalte affiner Figuren 61.
Involution 10 Aufg. 6.

Kegelschnitte 171.
Konjugationswinkel 111, 140.
Konjugierte Durchmesser der Ellipse 98—101, 106—108, 110—113.
Konjugierte Durchmesser der Hyperbel 138—141.
Konjugierte Hyperbeln 133.

Koordinaten (rechtwinklige, schiefwinklige) eines Punktes 12.
Koordinatenachsen 12.
Koordinatentransformation durch Drehung der Achsen 29—30.
Koordinatentransformation durch Verlegung des Anfangspunktes 14.
Kreis 72—90.
Kurven zweiten Grades 175.

Längeneinheit 1.
Laufende Koordinaten 38, 79.
Leitlinie s. Direktrix.
Linienpaar 68 Aufg. 5, 175 Aufg. 4.

Menelaus (Satz des Menelaus) 62.
Mittellinien eines Dreiecks 19 Aufg. 5, 32 Aufg. 6, 55, 66 Aufg. 3.
Mittelpunkt der Ellipse 93.
Mittelpunkt der Hyperbel 128.
Mittelpunkt einer Strecke 4 Aufg. 3, 7, 18.
Mittelpunkte affiner Strecken 60.
Mittelpunkte paralleler Sehnen der Ellipse 99.
Mittelpunkte paralleler Sehnen der Hyperbel 139.
Mittelpunkte paralleler Sehnen der Parabel 159.
Mittelpunkte paralleler Sehnen des Kreises 77.

Nebendurchmesser der Hyperbel 128.
Neigungswinkel einer Geraden s. Winkel einer Geraden mit der positiven x-Achse.
Normale der Ellipse 121.
Normale der Hyperbel 152.
Normale der Parabel 162.
Normalform der Gleichung einer Geraden 45.

Ordinate eines Punktes 12.
Ordinatenachse 11.

Parabel 155—176.
Parallelkoordinaten 13.
Parallelismus zweier Geraden 47.
Parameter, veränderlicher 67.
Pol und Polare in Bezug auf den Kreis 81—82.
Pol und Polare in Bezug auf die Ellipse 113—119.
Pol und Polare in Bezug auf die Hyperbel 149—150.
Pol und Polare in Bezug auf die Parabel 167—169.
Polargleichung der Ellipse 95.
Polargleichung der Hyperbel 131.
Polargleichung (gemeinsame) der Kegelschnitte 174.
Polarkoordinaten 15—16.
Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis 83—84.
Potenzlinie 85.
Potenzpunkt 86.
Punktsysteme 59.

Radikalachse 85.
Radikalzentrum 86.
Radius Vektor eines Punktes 16.
Richtung (positive, negative) 1.
Richtungskoeffizient einer Geraden 36.
Richtungskoeffizienten affiner Geraden 60.

Scheitel der Ellipse 93.
Scheitel der Hyperbel 129.
Scheitel der Parabel 156.
Scheitelgleichung der Ellipse 108, 172.
Scheitelgleichung der Hyperbel 144, 172.
Scheiteltangente der Parabel 158.
Schwerpunkt einer Dreiecksfläche 19 Aufg. 4.
Schwerpunktstransversalen s. Mittellinien.
Sehnen der Hyperbel 145—149.

Senkrechte in den Mitten der Seiten eines Dreiecks 52 Aufg. 8, 55.
Strahlenbüschel 54.
Subnormale der Ellipse 123.
Subnormale der Parabel 162.
Supplementarsehnen der Ellipse 107.
Supplementarsehnen der Hyperbel 143.
Systeme von Kreisen 84—88.
Systeme von Punkten 59.

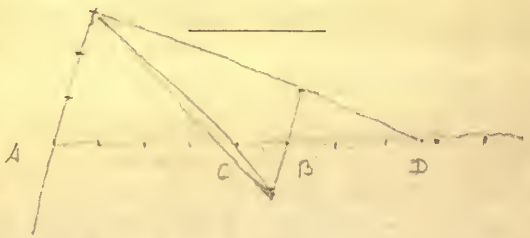
Tangente einer Kurve 78.
Tangenten der Ellipse 103—108.
Tangenten der Hyperbel 142—144, 145—149.
Tangenten der Parabel 160—166.
Tangenten des Kreises 78—82.
Teilverhältnis eines Punktes 5, 18—19.
Transformation s. Koordinatentransformation.
Transversalen im Dreiecke 62—66.

Übergang s. Koordinatentransformation.
Umgeschriebener Kreis der Ellipse 95, 97—98.

Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kreises 66 Aufg. 3.
Vollständiges Viereck 65.
Vorzeichen einer Strecke 3.
Vorzeichen eines Dreiecks (Vielecks) 20—26.

Winkel einer Geraden mit der positiven x-Achse 16, 35—37.
Winkel zweier Geraden 49.
Winkelhalbierende s. Halbierungslinien.

Zugeordnete Punkte einer harmonischen Gruppe 8.



ABCD

$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ $\quad \frac{4}{1} : \frac{7.5}{2.5}$

$\frac{5}{4} \quad \frac{2.5}{3.5}$

Analytische Geometrie (Koordinatengeometrie).

Analytische Geometrie der Ebene.

(Kegelschnitte und höhere ebene Kurven.)

Benter, Untersuchungen über Tangentialkegel und die Kurven 2. Gr. n. *M.* 2.—

Clebsch, Vorlesungen über Geometrie. I. Band, bearb. von Lindemann. n. *M.* 24.—

Dingeldey, Erzeugung von Kurven 4. O. durch Bewegungsmechanismen. n. *M.* 2.—

—— topologische Studien u. s. w. n. „ 2.40

Durège, die ebenen Kurven 3. Ordnung. n. „ 7.20

Fort und Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Teil. n. *M.* 4.—

Ganter und Rudio, Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. n. *M.* 2.40

Graefe, Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen. n. „ 3.60

—— Aufgaben und Lehrsätze aus der anal. Geometrie der Ebene. n. „ 2.40

—— —— Auflösungen und Beweise dazu. n. „ 4.80

Gundelfinger, analytische Geometrie der Kegelschnitte, v. Dingeldey. n. *M.* 12.—

Hesse, 7 Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. n. *M.* 1.60

—— Vorlesgn aus der anal. Geom. der Geraden, des Punktes u. d. Kreises. n. *M.* 5.20

—— 4 Vorlesungen aus der analytischen Geometrie. n. „ 1.60

Hochheim, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. n. „ 4.20

Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. n. „ 2.—

Richter, O., über besondere Systeme von Kegelschnitten u. s. w. n. „ 4.—

Rudio und Ganter, siehe: Ganter und Rudio.

Salmon, analytische Geometrie der Kegelschnitte, bearb. von Fiedler. n. *M.* 17.—

—— analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, bearb. v. Fiedler. n. *M.* 11.20

Schlömilch und Fort, siehe: Fort und Schlömilch.

Schwering, Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten. n. „ 2.80

Servus, die analytische Geometrie der Ebene. n. „ 1.60

Weifsenborn, Grundzüge der analytischen Geometrie der Ebene. n. „ 7.—

Analytische Geometrie des Raumes.

(Flächen 2. und höheren Grades, allg. Theorie der Raumkurven und Flächen.)

Benter, Untersuchungen über Tangentialkegel und die Kurven 2. Gr. n. *M.* 2.—

Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, deutsch von Lukat. n. *M.* 22.60

Clebsch, Vorlesungen über Geometrie. II. Band, bearb. v. Lindemann. n. *M.* 12.—

Escherich, v., Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes. n. *M.* 5.20

Fort und Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie. II. Teil. n. *M.* 5.—

Graefe, Aufgaben und Lehrsätze aus der analyt. Geometrie des Raumes. n. *M.* 3.—

—— —— Auflösungen und Beweise dazu. n. „ 8.—

Hesse, Vorlesgn über analyt. Geom. des Raumes, revid. von Gundelfinger. n. *M.* 13.—

Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen u. s. w., bearb. von Natani. n. *M.* 6.—

14 DAY USE
RETURN TO DESK FROM WHICH BORROWED
ASTRON-MATH-STAT.
LIBRARY
This book is due on the last date stamped below, or
on the date to which renewed.
Renewed books are subject to immediate recall.

LD 21–40m-10,'65
(F7763s10)476

General Library
University of California
Berkeley

Knoblauch, n.
Kommerell M. 8.—
Lilienthal, n.
Loria, haupts M. 5.—
te.
Möbius, übe M. 3.—
—— die Thec „ 2.40
ig.
Reye, Geome M. 2.—
Rudio, die E „ 2.40
Salmon, ana „ 2.40
er.
Schlömilch M. 24.—
Stahl und Ko
rie.
Staude, die M. 4.—
„ 7.—

Bianchi, Vo at.
Clebsch, Vo M. 22.60
Fiedler, Ele „ 24.—
Gundelfing „ 4.40
te.
Hesse, 4 Vo M. 12.—
Klein, the E „ 1.60
—— Conférer „ 6.—
Lie, Geometri „ 5.20
Muth, Grun „ 24.—
ie.
Neumann, C M. 3.—
Plücker, ne „ 1.50
in.
—— mathem M. 15.—
Schwering, „ 50.—
Sturm, die „ 2.80
ne-
tischer B M. 42.—
Weifsenbor „ 7.—

Grafsmann' „ 28.—
Killing, die „ 6.80
Schlegel, System der Raumlehre. n. „ 11.—

Konforme Abbildung.

(Isogonale Verwandtschaft — siehe auch unter „Funktionentheorie".)

Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften. n. M. 4.40

—— Durchführung einer isogonalen Verwandtschaft, repräsentiert durch eine gebrochene Funktion 2. Grades. n. M. 2.—

—— einige Aufgaben der darstellenden Geometrie und der Kartographie. n. M. —.80

Kartenprojektionen.

Herz, Lehrbuch der Landkartenprojektionen. n. M. 10.—

Holzmüller, einige Aufg. d. darstellenden Geom. u. d. Kartographie. n. „ —.80

Zöppritz, Leitfaden der Kartenentwurfslehre. n. „ 4.80

ASTRONOMY, MATHEMATICS-
STATISTICS LIBRARY

Arithmetik, Algebra und Zahlentheorie.

Allgemeine Zahlenlehre.

Bachmann, Vorlesungen über die Natur der Ir
Kronecker, Vorlesungen über Zahlentheorie.
Minkowski, Geometrie der Zahlen.
Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebr
Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik.
—— Gröfsen und Zahlen.

U. C. BERKELEY LIBRARIES
C048071987

Lehrbücher der Arithmetik und Algebra.

(Gleichungen niederen Grades.)

Bardey, arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik. n. „ 2.40
—— —— Resultate nebst Auflösungen dazu. n. „ 1.—
—— arithmetische Aufgaben. Neu bearb. von Pietzker u. Presler. [U. d. Pr.].
—— a Aufgaben. Neu bearbeitet von Hartenstein. n. M. 2.—
—— n. „ 1.80
—— n. „ 1.—
—— n. „ 3.20
—— n. „ 1.—
—— Presler.
d. Pr.]
—— . n. M. 6.—
—— n. „ 3.—
—— n. „ 1.60
—— ıfgaben.
n. M. 1.50
Bier n. „ 10.—
Can n. „ 1.80
Holz k. n. „ 13.60
Kro zhungen.
. d. Pr.]
Lag ermüller.
n. M. 2.40
Matthiesen, . n. „ 8.—
Menge und Werneburg, antike Rechenaufgaben. n. „ —.80
Pascal, Repertorium der höheren Mathematik, deutsch von Schepp. [U. d. Pr.]
Richter, A., Sammlung arithmetischer und trigonometrischer Aufgaben. n. M. 2.70
Särchinger und Estel, Aufgabensammlung für den Rechenunterricht. n. M. 3.—
—— Resultate zu der Aufgabensammlung. n. „ 2.70
Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. n. „ 8.—
—— Abrifs der Arithmetik und Algebra. n. „ —.60
Schüler, Arithmetik und Algebra in philosophischer Begründung. u. „ 4.—
Schüller, Arithmetik u. Algebra in engster Verknüpfung m. d. Geometrie. n. M. 2.50
Serret, Handbuch der höheren Algebra, deutsch von Wertheim. n. „ 19.—
Servus, Sammlung von Aufgaben aus Arithmetik und Algebra. n. „ 2.70
Sommer, Leitfaden beim ersten Unterricht in der Algebra. n. „ —.60
Unger, Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklg. n. M. 6.—

781457
UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

☞ Näheres über obige Werke befindet sich in **TEUBNERS MATHEMATISCHEM KATALOG** [XXIX u. 129 S.], der in allen Buchhandlungen, sowie auch von der Verlagsbuchhandlung **B. G. Teubner in Leipzig, Poststrafse 3, gratis und franko zu haben ist.**